湿潤大気の熱力学の基礎

坂浦いと

2025-07-09

はじめに

湿潤大気とは，水蒸気を含んだ大気である．水蒸気の存在は大気熱力学およびそれに伴って大気運動や循環に影響を及ぼす．相転移は潜熱の吸収・放出により非断熱効果をもたらす．また水蒸気の相転移はおもに対流系で盛んに行われ，総観スケールのサブスケール現象でありスケール間相互作用に着目する必要があり，大気の力学は複雑となる．

この記事では，おもに湿潤大気熱力学の方程式を書き下すとする．

1　準備: 乾燥大気の熱力学第一法則と断熱温度減率

1.1　熱力学第一法則と温位

(単位質量あたりの) 熱力学第一法則は，

$$c_v \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} + p\frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}t} = Q \tag{1.1}$$

であたえられるものであった．ここで Q は非断熱加熱率である．

また状態方程式は

$$p = \rho R_d T \tag{1.2}$$

であった．

ここで状態方程式 $p\alpha = RT$ $(\alpha = 1/\rho)$ を時間全微分すると，

$$p\frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}t} + \alpha\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = R\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} \tag{1.3}$$

であるが，式(1.1)に代入することによってエンタルピー $h = c_p T$ 表示の熱力学第一法則，

$$c_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \alpha \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = Q \tag{1.4}$$

をえる．右辺非断熱加熱率 Q に着目してエントロピー表示をえるために両辺を T でわれば

$$c_p \frac{1}{T} \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} - \frac{\alpha}{T} \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = \frac{Q}{T} \tag{1.5}$$

となり，左辺第二項に状態方程式を適用すると，

$$c_p \frac{\mathrm{D}\ln T}{\mathrm{D}t} - R \frac{\mathrm{D}\ln p}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} \tag{1.6}$$

をえる．注意すべきこととして加熱率 Q は遷移に拠る非状態量であり，熱平衡のときには定義されないが，(質量あたりの) エントロピー s は状態量であり，各熱平衡状態時に一意に定義される．

いま理想大気で断熱遷移 (可逆過程) を経るものとする．したがってこのとき $Q = 0$ あるいは $\mathrm{D}s/\mathrm{D}t = 0$ であり，式(1.6)を通常の全微分で表示すると，

$$c_p \mathrm{d}\ln T - R \mathrm{d}\ln p = \mathrm{d}(c_p \ln T - R \ln p) = 0 \tag{1.7}$$

となる．これを温度 $T \to \theta$，対応して圧力 $p \to p_s$ の範囲で積分を実行すると，

$$c_p \ln\left(\frac{\theta}{T}\right) = R \ln\left(\frac{p_s}{p}\right) \tag{1.8}$$

となり，両辺に exp を作用させて整理すると，

$$\theta = T \left(\frac{p_s}{p}\right)^{R/c_p} \tag{1.9}$$

をえる．

式(1.9)で定義される物理量 θ，

$$\theta := T \left(\frac{p_s}{p}\right)^{R/c_p} \tag{1.10}$$

を温位という．解釈として，任意の気圧 p において温度 T をもつパーセルをある参照気圧面 p_s に**断熱的に**もってきたときの温度 θ である．これによって異なる気圧高度にあるパーセルの重さを比較することができ，のちになるが成層に対する静的安定性が定義される．p_s は一般に 1000 hPa をとることが多く，任意の気圧面におけるパーセルを断熱的に地表付近にもってきたときの温度として解釈できる．

この定義式に対して対数をとり時間全微分を行えば，

$$c_p \frac{\mathrm{D}\ln\theta}{\mathrm{D}t} = c_p \frac{\mathrm{D}\ln T}{\mathrm{D}t} - R\frac{\mathrm{D}\ln p}{\mathrm{D}t} \tag{1.11}$$

をえて，熱力学第一法則は，

$$c_p \frac{\mathrm{D}\ln\theta}{\mathrm{D}t} = \frac{J}{T} = \frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} \tag{1.12}$$

と書き換えられる．非断熱加熱によってパーセルの温位は変化することを述べている．

他方，温位はエントロピーとつぎの関係で結び付けられる:

$$s = s_* + c_p \ln(\theta). \tag{1.13}$$

1.2　乾燥断熱温度減率と乾燥静的エネルギー

気温減率とは高度に対する気温の減少率，

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{1.14}$$

のことである．ここでは乾燥大気で断熱の場合を考えよう．ここで温位の定義式(1.10)に対数鉛直微分を行うと，

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_p}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.15}$$

ここで，静水圧平衡 $\partial p/\partial z = -\rho g$ および乾燥大気に対する状態方程式 $p = \rho RT$ を用いて整理すると，

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \tag{1.16}$$

をえる．いま等温位大気 (温位の鉛直プロファイルが高度によらず一定) とすれば，$\partial\theta/\partial z = 0$ より，

$$\Gamma_d =: -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{c_p} \tag{1.17}$$

をえる．これを乾燥断熱気温減率という．大気が理想気体であれば c_p は一定であり，乾燥断熱気温減率は高度によらず一定である．実際の大気は c_p が気圧によるため，厳密には一定ではないものの大気下層では近似的に一定と考えても差し支えない．

乾燥断熱気温減率に従って鉛直運動するパーセルは温位が一定である．したがって等温位面を提供する．

他方，断熱遷移する熱力学第一法則，

$$c_p\mathrm{d}T - \alpha\mathrm{d}p = 0 \tag{1.18}$$

を考える．いま乾燥大気内でパーセルは鉛直のみに仮想的に動かすとする．いま左辺第二項に静水圧平衡を適用すると，

$$c_p \mathrm{d}T + g\mathrm{d}z = 0 \tag{1.19}$$

をえる．この式からパーセルが断熱的に運動する場合は位置エネルギーとエンタルピーの収支がなりたつことがわかる．さらに，c_p と g を常数とみなせば，

$$\mathrm{d}(c_p T + gz) = 0 \tag{1.20}$$

あるいは，

$$c_p T + gz = \mathrm{const} \quad \text{(断熱的，鉛直方向)} \tag{1.21}$$

の関係が得られ，$c_p T + gz$ を乾燥静的エネルギーとよび，断熱的な鉛直運動で保存される (水平的には一定でないことに注意)．

この物理量の導出過程において $c_p\mathrm{d}T + g\mathrm{d}z$ を経由したが，温位を経由せずとも乾燥断熱気温減率を導出することが可能である．

断熱減率 Γ_d をもちいて式(1.16)を書き改めると，

$$\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma \tag{1.22}$$

となる．ここで $\Gamma = -\partial T/\partial z$ とした．いま，つぎのような関係がえられるだろう:

- $$\frac{\partial\theta}{\partial z} > 0 \iff \Gamma_d > \Gamma \tag{1.23}$$

  つまり，上空に向かって温位が大きくなるような大気では気温減率は断熱気温減率より小さい．

- $$\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \iff \Gamma_d = \Gamma \tag{1.24}$$

  高度によらず温位が一定である大気，等温位大気では気温減率は断熱気温減率に等しい: $\Gamma = g/c_p$

- $$\frac{\partial\theta}{\partial z} < 0 \iff \Gamma_d < \Gamma \tag{1.25}$$

  高度とともに温位が減少する大気では，気温減率が断熱気温減率より急である．

これらの温度的な関係に対してどのような物理的解釈を与えるか？

1.3 静的安定性

ここで一旦鉛直運動方程式を再考する．

いま基準位置から鉛直方向に微小に δz だけ変位したときにパーセルにはたらく力と運動方程式を考える．

静止大気の鉛直運動方程式は密度 ρ_0 と気圧 p_0 に対して，

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}z} = -\rho g, \tag{1.26}$$

すなわち静水圧平衡が成立したことを我々はすでに学んだ．ここである高度 z_0 においてパーセルが鉛直微小的に δz だけ変位したとする．パーセルが変位したならばその近傍では非静水圧平衡的と考えることができるだろう．なお微小変位のため環境場に対する撹乱は小さいものである．したがって非静水圧平衡の部分に着目して δz だけ微小変位したパーセルの鉛直運動方程式は

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}(\delta z) = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.27}$$

で与えられるだろう．ここで p と ρ はそれぞれ**パーセルの** 圧力と密度と解釈されるだろう．一方 p_0 と ρ_0 は**環境場の**圧力と密度である．ところが，微小変位下においては圧力がパーセルと環境場に関してただちに調節が行われて $p = p_0$ であることを仮定する．したがって式(1.27)は静水圧平衡から，

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}(\delta z) = -g + g\frac{1}{\rho}\rho_0 = g\left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}\right) \tag{1.28}$$

と書き換えられる．右辺に関して整理を行う．$p = p_0$ に注意して，

$$\begin{aligned} \mathrm{R.H.S} &= g\left(\frac{p_0/RT_0 - p_0/RT}{p_0/RT}\right) \\ &= g\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right) \\ &= g\left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

と変形できる．ただし最後の変形で温位の定義式かつ $p = p_0$ をもちいた．

さらにパーセルの初期位置を $z = z_0$ とする．θ は**パーセルの**温位，θ_0 は**環境場の**温位であるが，断熱的な鉛直運動を考えているので θ は鉛直的に一定である．また初期位置 z_0

においては $\theta = \theta_0$ であることが見込まれる．ここで，運動方程式は $z_0 + \delta z$ において評価されていることに注意して，

$$\begin{aligned}\theta(z_0+\delta z) - \theta_0(z_0+\delta z) &\underbrace{=}_{\text{パーセル断熱性}} \theta(z_0) - \theta_0(z_0+\delta z) \\ &\underbrace{=}_{\theta(z_0)=\theta_0(z_0)} \theta_0(z_0) - \theta_0(z_0+\delta z) \\ &\underbrace{\approx}_{\delta z\text{は微小}} -\left(del\theta_0 z\right)_{z=z_0}\delta z\end{aligned} \tag{1.30}$$

と変形される．したがって式(1.28)の右辺は，

$$\begin{aligned}N^2 &:= g\frac{\rho_0-\rho}{\rho} \\ &= g\frac{\theta-\theta_0}{\theta_0} \\ &= g\frac{T-T_0}{T_0} \\ &= \frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.31}$$

で与えられ，運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}(\delta z) = -N^2\delta z \tag{1.32}$$

と書き換えられる．ここで N は Brunt-Vaisala 振動数，あるいは浮力振動数といい，大気の場合

$$N := \sqrt{\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}} \tag{1.33}$$

であたえられる．ここで以下の場合を考えられるだろう：

- $N^2 > 0$ のときパーセルは初期位置 z_0 を中心に鉛直的に単振動する．このとき環境場は $\partial\theta/\partial z > 0$，温位が高度とともに大きくなる大気であり，気温減率は断熱気温減率より緩やかである．
- $N^2 < 0$ のときパーセルは初期位置 z_0 から指数函数的に変位してもとの位置にもどらない．このとき環境場は $\partial\theta/\partial z < 0$ であり，温位は高度とともに低くなる大気であり，気温減率は断熱気温減率より急激である．

さらに式変形の途中，

$$-g\frac{\delta\rho}{\rho} = g\frac{\delta\theta}{\theta_0} \tag{1.34}$$

ただし δ はパーセルと環境場の物理量の差を示す．この関係から浮力と温位のゆらぎには関係があることが示された．その関係から，初期位置 $z = z_0$ から δz だけ変位した，$z + \delta z$ にパーセルが位置するとき，1 つ目の場合は $\rho_0 < \rho$ よりパーセルは周囲の気体より重く初期位置に戻ろうとする復元力がはたらき，2 つ目の場合は $\rho_0 > \rho$ よりパーセルは周囲の気体より軽く，$\delta z > 0$ ならばパーセルはさらに上昇を続けることが解釈され，環境場の鉛直的な温位プロファイルから力学的な安定性を演繹することができる．このような安定性を**静的安定性**とよぶ．したがって，

- $\partial\theta_0/\partial z > 0$: 静的安定
- $\partial\theta_0/\partial z = 0$: 静的中立
- $\partial\theta_0/\partial z < 0$: 静的不安定

と静的安定性を定義することが可能である．

地球大気対流圏において Brunt-Vaisala 振動数は $N \approx 1.2 \times 10^{-2}$ $[\mathrm{s}^{-1}]$ であり，成層圏では高度とともに急激に温度あるいは温位が大きくなることから N は大きくなる．この振動数では浮力振動は約 8 分であり，成層圏では短くなる．

今回は鉛直方向に対するパーセルの浮力振動を考えたが，ナイーブな解釈であるが斜めに振動すると周辺に擾乱が伝播する，内部重力波となる．これは主に山岳や対流活動によるパーセルの鉛直的な運動を起源とする．

2　湿潤大気に対する熱力学

2.1　湿潤大気の状態方程式

湿潤大気とは，水蒸気 (water vapour) を含む大気である．水蒸気は相転移によって液体の水と相転移するがその際，潜熱 (latent heat) によって凝結 (condensation)[*1] 時 (水蒸気から水)，潜熱加熱つまり大気は加熱され，一方の水から水蒸気になる蒸発では大気は冷却される．潜熱は，水 (気体・液体) から大気への相転移の際の熱のやりとりである．一方顕熱 (sensible heat) は放射などに代表される，熱エネルギーの流速である．

相転移による潜熱は，大気の力学に影響し，さらに水蒸気の存在は浮力にも影響する．

乾燥大気の熱力学第一法則は，

$$p_d = \rho_d R_d T \tag{2.1}$$

[*1] 余談だが，物理の人いわく，「凝結」は気象学の方言らしい．物理のひとは「凝縮」というのを SNS できいた

であった．ここで $_d$ は dry air を示している．

一方，水蒸気を理想気体と仮定したときの純粋な水蒸気の状態方程式は，

$$e = \rho_v R_v T \tag{2.2}$$

である．ここで e は水蒸気の圧力，ρ_v は水蒸気密度である．ここで注意していただきたいことに気体常数 R_v は R_d と異なる．そもそもこれらの気体常数は普遍気体常数 (モル気体常数) を分子量でわったものであった．ここで水 $\mathrm{H_2O}$ の分子量は 18 であり，乾燥大気の分子量 29 より軽い．そのため気体常数はおのおの，

$$R_d = 287, R_v = 462\ [\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}] \tag{2.3}$$

である．ここで湿潤大気の状態方程式をもとめよう．

まず圧力に関して，Dalton の分圧の法則より，湿潤大気の圧力は $p = p_d + e$ である．ここで代入を行うと，

$$p = (\rho_d R_d + \rho_v R_v)T \tag{2.4}$$

になる．これをもっときれいな式にできないだろうか．ここでつぎのように変形できたと仮定する．温度に対応するある量 T_v があって，$\rho = \rho_v + \rho_v$ をもちいて，

$$p = \rho R_d T_v \tag{2.5}$$

をみたすものを考える．

ここで T_v をもとめるが，(2.1)と(2.2)を素直に足し合わせて，右辺は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R.H.S.} &= (\rho_d R_d + \rho_v R_v)T \\
&= \left(\rho_d + \rho_v \frac{R_v}{R_d}\right) R_d T \\
&= (\rho_d + \rho_v) R_d T + \rho_v \left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right) R_d T \\
&= \left[\rho + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\rho_v\right] R_d T \\
&= \rho\left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\frac{\rho_v}{\rho}\right] R_d T \\
&= \rho\left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)\frac{e}{p}\frac{R_d}{R_v}\frac{T_v}{T}\right] R_d T \\
&= \rho \underbrace{\left[\frac{T}{T_v} + \frac{e}{p}\left(1 - \frac{R_d}{R_v}\right)\right]}_{=1} R_d T_v
\end{aligned} \tag{2.6}$$

より，

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{e}{p}\left(1 - \frac{R_d}{R_v}\right)} \tag{2.7}$$

とさだまる．T_v は仮温度 (virtual temperature) といい，乾燥大気の温度で同じ圧力と密度をもつ湿潤大気に対応するものである．

実際水蒸気量は $\rho_v \ll \rho_d$ という関係がなりたつので，

$$\begin{aligned} T_v &= \frac{\rho_d R_d + \rho_v R_v}{(\rho_d + \rho_v) R_d} T \\ &= \frac{R_d + \frac{\rho_v}{\rho_d} R_v}{\left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_d}\right) R_d} T \\ &= \frac{1 + \frac{\rho_v}{\rho_d}\frac{R_v}{R_d}}{1 + \frac{\rho_v}{\rho_d}} T \end{aligned} \tag{2.8}$$

であるが，ここで混合比 $w := \rho_v/\rho_d$，つまり乾燥大気密度に対する水蒸気密度を定義し，これはたかだか 40g/kg くらいであり，1 より十分小さいものとして近似を行えば，$R_v/R_d = 1.61$ を用いて，

$$\begin{aligned} T_v &\approx \left(1 + \frac{R_v}{R_d} w\right)(1 - w) T \\ &\approx \left[1 + \left(1 - \frac{R_v}{R_d}\right) w\right] T \\ &= (1 + 0.61 w) T \end{aligned} \tag{2.9}$$

という近似式がえられる．また $T_v \geq T$ であることがわかるだろう．

ある温度の空気において存在できる最大の水蒸気密度を飽和水蒸気密度，圧力を飽和水蒸気圧という．ここで飽和水蒸気圧 e_s は温度のみの函数として，Clausius-Clapeyron の関係式，

$$\frac{1}{e_s}\frac{\mathrm{d}e_s}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{R_v T^2} \tag{2.10}$$

に規定されるといわれる．

飽和水蒸気圧に対しての水蒸気圧の割合を相対湿度という：

$$RH = \frac{e}{e_s} \tag{2.11}$$

一方で，混合比 w は状態方程式から，

$$q = 0.622 \frac{e}{p - e} \tag{2.12}$$

とかける．ここで $M_v/M_d = 0.622$ であることに注意しよう．

2.2 相当温位

湿潤大気のパーセルにおいて温位は潜熱によって変化する．ここでは，潜熱があっても保存するような代替の温位を考えたい．ここで我々は相当温位 (equivalent potential temperature)θ_e を定義したい．相当温位のモチベーションとして，パーセルに含まれる水蒸気すべてが凝結したときの温位を考えることである．このとき凝結熱によってパーセルが加熱されることがわかる．鉛直運動の文脈に考えると，与えられた気圧における湿潤大気のパーセルを断熱的に[*2]水蒸気がすべて凝結するまで持ち上げて，湿度が 0 になったら 1000hPa まで断熱的に降下させることを考える．これを数式を用いて考えよう．

(質量あたり) 潜熱加熱率は，(教科書にあわせて混合比を q とかこう)

$$Q = -L_c \frac{\mathrm{D}q_s}{\mathrm{D}t} t \tag{2.13}$$

である．ここで L_c は凝結に伴う潜熱，マイナスである理由は，凝結のときパーセルから水蒸気が取り除かれる，つまり減少することを意味するからである．q_s は飽和時のパーセルの混合比をしめす．したがって熱力学第一法則は，

$$c_p \frac{\mathrm{D}\ln\theta}{\mathrm{D}t} = -\frac{L_c}{T}\frac{\mathrm{D}q_s}{\mathrm{D}t} \tag{2.14}$$

となる．積分を遂行するが，鉛直運動に対して T や L_c の変化より q_s の変化率のほうがだいぶ大きいとする．このとき近似的に，

$$\mathrm{d}\ln\theta \approx -\mathrm{d}(L_c q_s / c_p T) \tag{2.15}$$

がなりたち，積分を $\theta \to \theta_e$，対応して $q_s \to 0$ まで遂行すると，

$$\theta_e \approx \theta \exp\left(L_c q_s / c_p T\right) \tag{2.16}$$

この式に関しては近似をおこないたいが，$L_c/c_pT \sim 10$，$q_s \sim 0.03$ でありよい近似は行えない．

相当温位 θ_e のかわりに有用な量として湿潤静的エネルギーがある．ここで静的乾燥エネルギー $s = c_pT + gz$ の導出のさい，熱力学第一法則を経由したが，それを思い出して加熱源を潜熱だけにかぎると，式(1.18)と静水圧平衡から

$$\mathrm{d}(c_pT + gz) \approx -\mathrm{d}(L_c q_s) \tag{2.17}$$

[*2] 持ち上げのさい，外部的な加熱をしないと言う意味．ただし潜熱解放はパーセル内の自主的な加熱として計上する

あるいは，

$$\mathrm{d}(c_pT + gz + L_cq_s) \approx 0 \tag{2.18}$$

とかける．ここで相当温位の近似式(2.16)と比較すれば，

$$\mathrm{d}h \approx c_pT\mathrm{d}\ln\theta_e \tag{2.19}$$

がえられ，静的湿潤エネルギーとして，

$$h = c_pT + gz + L_cq_s \tag{2.20}$$

として考えられ，湿潤大気のパーセルはエンタルピー (内部エネルギーと圧力エネルギーの和) と位置エネルギーと潜熱の和として考えることができる．

2.3 湿潤断熱気温減率/擬断熱気温減率

乾燥大気では，パーセルを断熱的にもちあげたさい断熱的に膨張，冷却し，気温減率は $\Gamma = g/c_p$ であった．しかし湿潤大気の場合話が違ってくる．

湿潤大気では，水蒸気を含むことから断熱冷却のさいやがて水蒸気は (液体の水，固体氷に対して) 飽和に達しさらに持ち上げを続けるとそれぞれ凝結，凝華することが予想される．この場合潜熱加熱によってパーセルの高度に対する気温減率はいくぶん乾燥大気の場合より緩和されることが予想される．これを数式で表現しよう．

いまパーセルが飽和にあったとしよう．温位の鉛直対数微分は，

$$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z} - \frac{R}{c_p}\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z} = -\frac{L_c}{c_pT}\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}z} \tag{2.21}$$

であたえられる．いま相図から $q_s = q_s(T,p)$ とすれば，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \frac{RT}{c_p}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{L_c}{c_p}\left[\left(\frac{\partial p_s}{\partial T}\right)_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial q_s}{\partial p}\right)_T\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right] \tag{2.22}$$

となる．静水圧平衡を適用すると，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \frac{g}{c_p} = -\frac{L_c}{c_p}\left[\left(\frac{\partial q_s}{\partial T}\right)_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \left(\frac{\partial q_s}{\partial p}\right)_T\rho g\right] \tag{2.23}$$

をえる．

ここで $q_s \approx \varepsilon e_s/p$, $\varepsilon = M_v/M_d = 0.622$ とし，Clausius-Clapeyron の式，

$$\frac{\mathrm{d}e_s}{\mathrm{d}T} = \frac{L_ce_s}{RT^2}$$

をもちいることで，

$$\frac{\partial q_s}{\partial p} \approx -\frac{q_s}{p}, \quad \left(\frac{\partial q_s}{\partial T}\right)_p \approx \frac{\varepsilon L_c q_s}{RT^2} \tag{2.24}$$

から，

$$\Gamma_s := -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \Gamma_d \frac{[1 + L_c q_s/(RT)]}{[1 + \varepsilon L_c^2 q_s/(c_p RT^2)]} \tag{2.25}$$

をえる．これを擬断熱気温減率 (pseudo-adiabatic lapse rate) という．一方，気象予報では「湿潤断熱気温減率」とよばれる．式から $\Gamma_d > \Gamma_s$ であることがわかる．したがって，凝結しつつもちあがるなら静的安定であるが，湿潤大気には，乾燥大気での静的安定性を拡張する必要がある．

2.4 条件付不安定

湿潤大気に対する気温の鉛直プロファイルに対する気温減率が Γ で与えられたとする．ここで $\Gamma_s < \Gamma < \Gamma_d$ であったとする．このとき，パーセルが未飽和であれば力学的に安定であることは既知である．しかし凝結しながら上昇する場合はどうなるか？この場合力学的には不安定となる．このとき，大気は条件付不安定 (conditional unstable) であるという．

条件付不安定性の条件を数式で与えよう．いま θ_e^* を飽和相当温位とする．これは大気全体が飽和であったと仮定した場合の相当温位で，持ち上げ凝結高度がつねにパーセルの高度となるような相当温位である．

数式では，

$$\theta_e^* = \theta \exp\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right) \tag{2.26}$$

であたえられる (相当温位とは違い完全な等式であることに注意)．

差分を取ると，

$$\mathrm{d}\ln\theta_e^* = \mathrm{d}\ln\theta + \mathrm{d}(L_c q_s/c_p T) \tag{2.27}$$

となる．T は実際の気温であり，断熱膨張を経てないものであることに注意しよう．

いま基準高度 z_0 に対して微小な $-\delta z$ だけ飽和したパーセルを変位させることを考える．

このとき，$z = z_0 - \delta z$ での環境場の温位は，

$$\theta_0 - \frac{\partial\theta}{\partial z}\delta z \tag{2.28}$$

であたえられる．他方飽和したパーセルは $z_0 - \delta z$ から z_0 だけ鉛直上向きに変位した場合断熱冷却による凝結潜熱解放が考えられる．これによって温位には $\delta\theta$ だけの温位変化

が生じると考えられ，$z = z_0$ にあるときのパーセルの温位 θ_1 は，

$$\theta_1 = \left(\theta_0 - \frac{\partial \theta}{\partial z}\delta z\right) + \delta\theta \tag{2.29}$$

であたえられる．ここで浮力振動を考えたときの鉛直運動方程式を再掲すると，

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = g\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0} \tag{2.30}$$

である．ここで右辺に対して湿潤大気の場合で評価する．

話を戻して，$\delta\theta$ を評価すると，温位で表した熱力学第一法則から

$$\frac{\delta\theta}{\theta} \approx -\delta\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right) \approx -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right)\delta z \tag{2.31}$$

であたえられる．これを運動方程式の右辺に代入すると，

$$g\frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_0} \approx -\frac{g}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\delta z - g\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right)\delta z \approx \frac{g}{\theta_e^*}\frac{\partial \theta_e^*}{\partial z}\delta z \tag{2.32}$$

となり，飽和したパーセルに対する鉛直運動方程式に対しては，

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} \approx -\frac{g}{\theta_e^*}\frac{\partial \theta_e^*}{\partial z}\delta z \tag{2.33}$$

であたえられる．ただしこれは上昇 $(\delta z > 0)$ に対して成立するものであり，下降時には自発的な凝結，潜熱効果は含まれないので右辺は $-N^2\delta z$ に置き換えられる．

いずれにしろ飽和パーセルに対しては上昇時にある条件で不安定性が生じることが帰結され，その条件こそ条件付不安定とよばれるものであり，

$$\frac{\partial \theta_e^*}{\partial z}\begin{cases} < 0 & \text{条件付不安定} \\ = 0 & \text{飽和中立} \\ > 0 & \text{条件付安定} \end{cases} \tag{2.34}$$

が成立する．

飽和相当温位の定義と気温減率の定義から，

$$\frac{T}{\theta_e^*}\frac{\partial \theta_e^*}{\partial z} = \frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + T\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right) = (\Gamma_d - \Gamma) - (\Gamma_d - \Gamma_s) = \Gamma_s - \Gamma \tag{2.35}$$

とかきかえられる．したがって，(2.35)は

$$\Gamma_s - \Gamma\begin{cases} > 0 & \text{条件付不安定} \\ = 0 & \text{飽和中立} \\ < 0 & \text{条件付安定} \end{cases} \tag{2.36}$$

とも気温減率の条件で書き換えられる．さらに静的安定性と組み合わせれば，気温減率に対して安定性は Γ_d, Γ_s のふたつによって規定され，$\Gamma_d > \Gamma_s$ であったことに注意して，

- $\Gamma < \Gamma_s$: 絶対安定
- $\Gamma = \Gamma_s$: 飽和中立
- $\Gamma_s < \Gamma < \Gamma_d$: 条件付不安定
- $\Gamma = \Gamma_d$: 静的中立
- $\Gamma_d < \Gamma$: 絶対不安定

と分類される．

参考文献

- James R. Holton, Gregory J. Hakim, Chapter 2 - Basic Conservation Laws, Editor(s): James R. Holton, Gregory J. Hakim, An Introduction to Dynamic Meteorology (Fifth Edition), Academic Press, 2013, Pages 31-66, ISBN 9780123848666, https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384866-6.00002-7.