順圧大気と傾圧大気

坂浦いと

2025-01-18

目次

1	はじめに	2
2	順圧流体と傾圧流体の一般論	3
3	大気における順圧大気と傾圧大気	11
4	気圧面における順圧と傾圧の表現	13
5	等価順圧大気	27

1　はじめに

気象学において，順圧大気と傾圧大気の区別は重要である．定義に拠れば，順圧大気とは密度面と気圧面が平行であるような大気，傾圧大気とは密度面と気圧面が平行ではない大気である．また現象として，力学現象において，順圧大気では速度場の水平シアによる順圧不安定，傾圧大気では速度場の鉛直シアに伴う傾圧不安定などがあげられる．熱力学的な現象としては，大気の状態量の鉛直プロファイルに注目した等価順圧や傾圧大気があげられる．順圧は二次元的，速度場のみという印象，傾圧では三次元的で力学場のみならず熱力学も含まれるという印象がある．しかし，これらの例や印象から順圧大気と傾圧大気の本質がつかめるか？たいていの人は掴めていない，あるいは掴めるのに時間がかかったとと考えられる．今回は，順圧と傾圧大気の本質について，順圧流体と傾圧流体の定義から演繹的に議論を行う．

2　順圧流体と傾圧流体の一般論

ここでは，大気に限らず一般的に流体において成り立つことを述べよう．地球大気の熱力学の状態は状態方程式 $p = \rho RT$(乾燥大気) として述べられるが，一般の流体の状態方程式は函数 F があって，$F(p, \rho, T) = 0$(簡単のため，相はひとつの流体かつ各成分間の物質の出入りはなし) と記述される．

まず，順圧と傾圧を定義しよう．

順圧流体と傾圧流体

定義 1

流体の熱力学状態が圧力場 $p = p(x, y, z, t)$，密度場 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ と温度場 $T = T(x, y, z, t)$ によって指定されているとする．

- 順圧(barotropic)流体とは，状態方程式が $F(p, \rho) = 0$ で書けるような流体である．
- 傾圧(baroclinic)流体とは，状態方程式が $F(p, \rho, T) = 0$ で書けるような流体である．

豆知識であるが，順圧と傾圧という用語を使うのは，気象学や地球流体力学に特有の用語である．流体力学では，順圧流体をそのまま英語でバロトロピックといい，傾圧流体に関してはバロクリニックという．また傾圧流体に関しては名を呼ぶことが少ないらしい．

状態方程式 $F = 0$ について，順圧流体ならば $p = p(\rho)$，傾圧流体ならば $p = p(\rho, T)$ と書ける．これらの関係と状態量が場であったことを思い出せば次の定理がえられる:

順圧流体と傾圧流体の同値な条件

定理 2

これらの主張は同値である:

1. 流体は順圧 (傾圧) である．
2. 等圧力面と等密度面が平行 (斜行) している．

《Proof》

順圧流体であることと等圧力面と等密度面の平行であることが同値であることを示す．

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

流体が順圧であれば，状態方程式は $p = p(\rho)$ と書ける．ここで $p = p(x, y, z, t)$，$\rho = \rho(x, y, z, t)$ であるので，三次元空間勾配 ∇_3 を $p(\rho(x, y, z, t))$ に作用させれば，

$$\nabla_3 p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \nabla_3 \rho \tag{2.1}$$

となるが $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$ はスカラー量であり，$\nabla_3 p \parallel \nabla_3 \rho$ であることがわかる．ここで，$\nabla_3 p, \nabla_3 \rho$ はそれぞれ等圧力面と等密度面と直交しており，等圧力面と等密度面は平行している．

- (ii) $\Rightarrow$ (i)

逆に等圧力面と等密度面が平行であるとする．任意の等密度面をとるとその上で圧力の値がわかるが，仮定からその圧力の値は単独である．したがってその密度面の値 ρ から圧力の値 p がただひとつ定まり，函数として $p = p(\rho)$ を考えることができる． □

両者の条件が同値であることを証明したので順圧流体と傾圧流体の定義をつぎのようしても差し支えない:

順圧流体と傾圧流体の定義

系 3
順圧流体であるならばそのときだけ $\nabla_3 p \times \nabla_3 \rho = 0$ が成立する．一方，傾圧流体ならばそのときだけ $\nabla_3 p \times \nabla_3 \rho \neq 0$ である．

これによって順圧性と傾圧性に関して場を用いて考えることができるようになる．

流体を非摩擦かつ断熱的とする．順圧流体では流体の運動が傾圧流体より幾分単純化される．まずは熱力学場に関する単純化である．

順圧流体の熱力学量の予報

定理 4
非摩擦・断熱順圧流体において熱力学量は診断方程式である状態方程式を解けば充分である．つまり，運動方程式と連続の式と状態方程式を解けば順圧流体の予報ができる．

《Proof》

非摩擦・断熱の熱力学第一法則は，

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} + p \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \tag{2.2}$$

であり，$U = U(p, \rho, T)$ であり，内部エネルギーに関する診断方程式を含めば，熱力学第一法則を予報する際は状態方程式 $p = p(\rho, T)$ やその他の方程式と組み合わせて行う．しかし，順圧流体ならば状態方程式は $p = p(\rho)$ に削減され，密度が決まれば圧力が与えられ，逆も然りである．したがって熱力学第一法則を解くことは不要となり，状態方程式と連続の式，運動方程式を解くことで順圧流体の予報ができるようになる．□

続いては運動場に関する単純化である:

渦の不生不滅

定理 5 (ケルビンの渦定理)
外力がポテンシャルで与えられる非摩擦な順圧流体では循環がラグランジュ的に保存される．

ここで循環を定義する．

定義 6 (循環)
循環 C を

$$C := \oint_c \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2.3}$$

と定義する．ただし，$\boldsymbol{v}$ は三次元速度，c は流れにしたがう閉曲線とする．

注意 7
ケルビンの循環定理は慣性系における定理であり，地球のような自転系では惑星渦度を考慮する必要がある．

証明はしないが，ベクトル解析の重要な定理として，ストークスの定理を挙げる．

数学の定理: ストークスの定理

定理 8
曲面 S とベクトル値函数 $\boldsymbol{V}$ が与えられたとき，

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla_3 \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}A \tag{2.4}$$

が成立する．

ストークスの定理を用いれば，循環 C と (絶対) 渦度 $\boldsymbol{\omega} := \nabla_3 \times \boldsymbol{v}$ が

$$C := \oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A \tag{2.5}$$

が成立する．循環とは与えられた曲面における渦度ベクトルの面積分であると考えられ，渦度は局所的な循環の面密度とも考えることができる．さて，定理 6が証明することを示そう．

《定理 6の証明》

慣性系の非摩擦的な運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla_3 p - \nabla_3 \Phi \tag{2.6}$$

と書かれる．ここで Φ は外部ポテンシャルである．循環 C に関して，ラグランジュ時間微分を行い積分路が流れとともに移動することに注意すると，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_c \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \oint_c \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_c \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.7}$$

式(2.6)を代入し，$\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})/\mathrm{D}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} &= -\oint_c \left(\frac{1}{\rho}\nabla_3 p\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \oint_c \nabla_3 \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_c \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} \\ &= -\iint_S \nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla_3 p\right) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A - \oint_c \mathrm{d}\Phi + \oint \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}^2 \quad = \iint_S \frac{\nabla_3 \rho \times \nabla_3 p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．ここでストークスの定理 (定理 8) を閉曲線 c とそれを境界とする任意の曲面 A に適用した．ベクトル解析の公式 $\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = \nabla f \times \boldsymbol{A} + f\nabla \times \boldsymbol{A}$ と $\nabla \times \nabla \boldsymbol{A} = 0$ を用いた．いま考えている流体は順圧なので，$\nabla_3 \rho \times \nabla_3 p = 0$ を代入して，

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{2.9}$$

が成立する． □

傾圧流体であるとき，一般に循環は流れに沿って保存されない．しかし式(2.8)において A を等エントロピー面にすればつぎの量が得られる．

渦位の存在

定理 9

流体 (順圧・流体かからわず) に物理量 Q が存在して，非摩擦かつ断熱的ならば，

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{2.10}$$

が成立する．

補題としてつぎのことを示そう：

等エントロピー面上では順圧

補題 10

等エントロピー面上では順圧である．

《Proof》

エントロピーでの熱力学第一法則は，

$$\Delta\eta = \frac{c_v}{T}\Delta T - \frac{p}{\rho^2 T}\Delta\rho \tag{2.11}$$

となる．いま，等エントロピー上で点を動かせば $\Delta\eta = 0$ である．この動かし方で勾配を求めると，

$$\frac{c_v}{T}\nabla_S T - \frac{p}{\rho^2 T}\nabla_S \rho = 0 \tag{2.12}$$

となる．ここで ∇_S とは等エントロピー面上のナブラである．今右から $\nabla_S T$ をクロス積作用させれば，

$$-\frac{p}{\rho^2 T}\nabla_S \rho \times \nabla T = 0 \tag{2.13}$$

になる．状態方程式から $T = T(p, \rho)$ とかけて，T の等エントロピー上の勾配をとると，

$$\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial T}{\partial p}\nabla_S \rho \times \nabla_S p = 0 \tag{2.14}$$

となり，スカラー部分は非ゼロより，$\nabla_S \rho \times \nabla_S p = 0$ つまり等エントロピー面上では順圧的．

□

この定理は，傾圧流体でも等エントロピー面上では順圧流体としてみなすことができることを伝えている．さらに断熱的な運動であればパーセルは等エントロピー面上を運動す

るのでパーセルにとって順圧流体と感じている．おなじ等エントロピー面上を運動する曲面で定義された循環に次のような補題が成立する．これは等エントロピー面上でケルビンの循環定理を適用する．

等エントロピー面上の循環はラグランジュ的保存される

補題 11
等エントロピー面上で流れとともに動く循環はラグランジュ的に保存される．

ここでつぎのような誤解が発生するだろう：

注意 12
この定理をみてパーセルが等エントロピー面上を運動することから循環は保存すると思うが，一般に循環の積分路におけるパーセルたちやそれが描くパーセルたちは異なったエントロピーを持っており循環は等エントロピー面で定義されていない．

パーセルは等エントロピー面上を運動する．ふとこの注意から積分路をパーセルのごく近くの閉曲線にとってみて曲線で循環の面密度をとることでパーセルを考えると絶対渦度 $\boldsymbol{\omega}$ が保存されると考えられそうだが，

注意 13
絶対渦度は断熱非摩擦な流体においてもラグランジュ的に保存されない．実際，

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\mathrm{d}A\to 0} \frac{1}{\mathrm{d}A}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iint_S \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = \lim_{\mathrm{d}A\to 0}\frac{1}{\mathrm{d}A}\iint_S\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\mathrm{D}\mathrm{d}A}{\mathrm{D}t}\right) \tag{2.15}$$

と微小曲面に関してのラグランジュ時間微分は 0 でない．これはパーセルに対する質量保存則に対応しており絶対渦度は速度場の収束発散によって変化する．

さて補題 10と 11から定理 9を証明しよう．

《定理 9の証明》

補題 11の議論にしたがって式(2.8)を等エントロピーな曲面上で考えると，右辺は 0 となり，

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iint_{S_\eta}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{2.16}$$

となる．今等エントロピー面で議論しているから面に対する法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla_3\eta}{|\nabla_3\eta|} \tag{2.17}$$

である．さらに $|\nabla_3\eta| = \delta\eta/\delta h$ となる．ここで h は $\nabla_3\eta$ ベクトルの向きであり，大きさはふたつの等エントロピー面，$\eta+\eta+\delta\eta$ と η との長さである．また等エントロピー面で積分を考えており，δh は底面積 $|\mathrm{d}A|$ に対する高さ，つまり $\mathrm{d}A\,\delta h$ はパーセルとして考えられる円柱と考えることができる．これらに事実を代入すると，

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iint_{S_\eta} \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_3\eta}{\rho}\frac{\rho\,\mathrm{d}A\delta h}{\delta\eta} \tag{2.18}$$

がえられる．ここで，パーセルに対する連続の式から

$$\rho\,\mathrm{d}A\,\delta h = \mathrm{const.} \tag{2.19}$$

と断熱的パーセルのエントロピー保存則から

$$\delta\eta = \mathrm{const.} \tag{2.20}$$

から，

$$\frac{\rho\,\mathrm{d}A\,\delta h}{\delta\eta} = K \tag{2.21}$$

と常数 K をおけば，

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iint_{S_\eta} \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_3\eta}{\rho}K = 0 \tag{2.22}$$

となる．ここで $\mathrm{d}A$ は K に含まれてしまっている．計算を続行すれば

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = \iint_{S_\eta} K\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_3\eta}{\rho}\right) = 0 \tag{2.23}$$

となって，面積分は任意のパーセルのごく近くの曲面で行われているので結局 Q を

$$Q := \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_3\eta}{\rho} \tag{2.24}$$

となり，

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{2.25}$$

が成立する． □

物理量 Q に名付けよう．

渦位

定義 14
渦位 Q をつぎのように定義する：

$$Q := \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_3 \eta}{\rho} \tag{2.26}$$

この量は断熱非摩擦的ならば，

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{2.27}$$

が成立する．

パーセルには質量保存則 (連続の式と等価) が成り立ち，さらに等エントロピー流ならば渦位保存則が成立する．渦位は力学と熱力学を合わせた物理量であり，適当な平衡条件があれば渦位から速度場や温度場など，予報物理量に関して逆変換ができる．これを渦位のインヴァージョンという．

3　大気における順圧大気と傾圧大気

ここからは自転する惑星における大気での順圧性と傾圧性を考えよう．大気は理想大気とみなすことができ，たとえば乾燥大気のように大気内で相転移や化学反応がないとする．この場合，大気の状態方程式は

$$p = \rho R T \tag{3.1}$$

と単純なかたちで書くことができる．大気には重力がはたらき自転系である．したがって運動方程式には外力として重力やコリオリ力がはたらくようになる．重力によって大気は密度成層となり，上空ほど密度や気圧が指数函数的に減少する．鉛直方向の気圧勾配力と重力とのつりあいによって静水圧平衡が起こりうることも特徴的である．一方，自転に関しては速度が非ゼロな定常流である地衡流が存在する．これはコリオリ力と水平気圧勾配力がつりあうことによって実現し慣性系の流体ではおこりえない性質である．

自転系の大気における順圧と傾圧性はどう表現されるか？自転系の大気中の順圧性と傾圧性に対して一般的な流体におけるいろいろな現象がおこるが，自転系の大気のみに順圧性と傾圧性，それぞれ特有の現象が発生する．

ここでは，自転系大気，とくに地球大気を想定した順圧大気と傾圧大気の例をあげる．

例 15

等温大気は順圧的である．この場合状態方程式は $T = T_0$ (常数) を用いて $p = \rho R T_0$ であり，$p = p(\rho)$ と書ける．

例 16

等温位大気は順圧的である．ここで温位は

$$\theta := T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \tag{3.2}$$

であったことを思いだそう．さらに温位はエントロピー η と，

$$\Delta S = c_p \, \Delta \ln(\theta) \tag{3.3}$$

という関係がなりたつ．ここで定理 10を思いだせば等温位大気 (等エントロピー大気) は順圧であることがいえる．等温位大気での状態方程式を求めよう．状態方程式 $p = \rho R T$ であるがこれから離れて一定の温位 $\theta = \theta_0$ にした温位から，

$$p^{1 - R/c_p} = p^{c_v/c_p} = \rho \frac{R\theta_0}{p_s^{R/c_p}} \tag{3.4}$$

すなわち，

$$p = \rho^\gamma \left(\frac{R\theta_0}{p_s^{R/c_p}} \right)^\gamma \tag{3.5}$$

となる．ここで $\gamma := c_p/c_v$ は比熱比であり，地球大気ならば組成の大部分が二原子分子気体なので約 $7/5$ である．一方式(3.5)のかっこ内は常数であり，これを C とおけば

$$p = C\rho^\gamma \tag{3.6}$$

となる．これを状態方程式 $p = \rho RT$ の代わりにすれば $p = p(\rho)$ という函数関係になり等温位大気は順圧であるといえる．

状態量 (p, ρ, θ, T) などは水平方向のゆらぎがなかったとしても一般的に大きく変動する鉛直プロファイルをもっている．しかし基準大気に等温度大気や等温位大気を用いて鉛直座標を定義すれば大気が順圧からどのくらい離れているか定量的に評価ができるだろう．

4 気圧面における順圧と傾圧の表現

気象学によく使われる座標系として気圧座標系がある．気圧座標系の派生として対数気圧座標系やシグマ座標系もあるがここではまとめて気圧座標系ということにする．気圧座標系の特徴として密度 ρ が支配方程式系に現れなくなることである．実際，気圧勾配力 $-\nabla p/\rho$ は $-\nabla\phi$ とジオポテンシャル勾配で表現され，連続の式は非圧縮性流体の連続の式と同じ形になる．つまり気圧座標系において密度に関しての予報が不要になることを意味する．しかしこれは大気そのものから密度の効果がなくなったことを意味しているわけではない．大気そのものに関しては通常の高度座標系と気圧座標系でみたとしても変わらないが，鉛直座標系に依存して表現が変わるだけである．このような表現の違いは大気現象の捉え方も変わると予想できる．ここで順圧性と傾圧性に関しては $p=p(\rho)$ か $p=p(\rho,T)$ と定義されていた．しかし気圧座標系では ρ が陽的に現れなくなることから順圧性と傾圧性の認識が難しくなる．そのため順圧・傾圧性に関して気圧座標系での解釈を与える必要がある．

まず気圧座標系の構成に関して再考するがキーコンセプトとして静水圧平衡がある．いまは通常の高度座標系をとるとする．

静水圧平衡

定義 17

静水圧平衡とは，気圧場 p と ρ に対して，

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{4.1}$$

という関係がなりたつことである．これはパーセルに対して鉛直上向きの気圧勾配力と下向き重力がつりあっていることを意味している．

静水圧平衡がなりたつとき，パーセルに対する鉛直方向の力が成り立っていることから鉛直加速度が生じない．実際の大気は完全に静水圧平衡がなりたたず，平衡から外れた部分の鉛直加速度によって対流や浮力振動が生じている．しかし大気が与えられた水平長に比べて大気が薄い場合は静水圧平衡と近似させることができる．気圧座標系は静水圧平衡をキーコンセプトとして考えるがこれは充分大気を浅く見ることができる水平長スケールについて静水圧平衡の範囲で大気を考察するフレームワークを提供しているとと考えられる．このフレームワークが適切である理由はいま考えている大気の幾何的スケールについ

て観測される運動の大部分が静水圧平衡の際の運動であると考えられるためである．しかしながら非静水圧部分に関しては除外されるため気圧座標系フレームワークにおいてはその部分の運動は捨てられることになる．この場合非静水圧平衡的な現象である対流雲活動や浮力振動に関しての直接な記述ができなくなりパラメタライゼーションなどによる推定になる．もちろん静水圧平衡への近似が破れてしまうスケールに関しては気圧座標系を適用することができない．

静水圧平衡の式(4.1)をみると $\rho > 0$ より右辺はつねに負である．したがって静水圧平衡の範囲ではかならず気圧は高度とともに狭義に単調減少することがわかる．この単調変化性から気圧座標系として，$p = p(z)$ 逆にとけば $z = z(p)$ として座標系を $(x, y, z, t) \to (x, y, p, t)$ へ変換し気圧座標系を構築する．そして気圧座標系のフレームワークで実際の大気を観測したり気圧座標系内で大気の計算を行いその結果を実際の大気に還元したりすることで，(静水圧平衡がなりたつ範囲のスケールで) 大気の運動を考察する．しかしながら函数 $p(z)$ の形はそう単純ではない．静水圧平衡 (式(4.1)) の右辺に状態方程式を適用し，ρ を消すと

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{RT} \tag{4.2}$$

となり，これを高度 $z = 0$ から $z = z$ まで積分すると，$z = 0$ で $p = p_s$ とすれば

$$\int_p^{p_s} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}p = \frac{g}{R}\int_0^z \frac{1}{T(z)}\,\mathrm{d}z \tag{4.3}$$

となるが $T = T(z)$ の形はわからない．仮に例 15のように $T = T_0 = \mathrm{const.}$ や $T = T_s - \Gamma z$，z は気温減率 (常数) のように単純な形を仮定すればとける．いま $T = T_0$ とすれば，式(4.3)は解析的に計算がされて，

$$p = p_s \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \tag{4.4}$$

のようにかける．ここで H はスケールハイトといい，

$$H := \frac{RT_0}{g} \tag{4.5}$$

という常数である．一方これを z について解けば，

$$z := -H \ln\left(\frac{p}{p_s}\right) \tag{4.6}$$

となる．ここでの z は等温度大気を仮定したのでもはや幾何的な高度ではない．気圧座標系から派生したものとして「対数気圧座標系」とよばれる．

静水圧平衡と状態方程式を用いて鉛直積分の全域で等温度大気を仮定したが鉛直的に一部だけに等温度大気を仮定すれば層厚公式が得られる．式(4.2)の積分の範囲を z から $z+\Delta z$ に制限し，z と $z+\Delta z$ での気圧を $p+\Delta p$ と p と，$\Delta z \Delta p \geq 0$ とすれば (高度と気圧の増加の向きは逆であることに留意)

$$\Delta z = \int_{z}^{z+\Delta z} \mathrm{d}z = \int_{p}^{p+\Delta p} \frac{RT}{gp} \mathrm{d}p \tag{4.7}$$

となる．このままだと解析的に積分できないが，T の z から $z+\Delta z$ の平均値として $\overline{T}$ とおけば，これは z に依存しないので積分が解析的に遂行できて，

$$\Delta z = \frac{R\overline{T}}{g} \Delta \ln(p) \tag{4.8}$$

となる．ここで $\Delta \ln(p) = \ln(p+\Delta p) - \ln(p)$ と取り直している．今気圧面との感覚 Δp が与えられたならば，気圧面間との高度差 Δz すなわち層厚は気圧面間の平均気温に比例することがわかる．定理にすると

層厚と平均気温

定理 18

層厚 (気圧面間) の大きさは気圧面間の平均気温に比例する

一方，この事実から式(4.8)に関して極限 $\Delta z \to 0$ それに伴って $\Delta p \to 0$ をとり，ジオポテンシャル $\phi = gz$ を用いれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} = -\frac{1}{\rho} \tag{4.9}$$

が得られ静水圧平衡 (式(4.1)) と等価な式が得られる．いま気圧座標系が p を座標軸に用いていることを考えると高度座標系における気圧に対応するジオポテンシャルの p での偏微分，すなわち気圧座標系における鉛直勾配は等 p 面についてそこでの温度 T に比例することがわかる．つまり定理 18に微分版として式(4.9)を考えることができる．式(4.9)のもっとも右辺に注目すれば層厚が密度の逆数に比例することがわかる．密度の逆数は空気の膨張具合と考えることができ層厚が温度と比例する事実から層厚が空気の膨張度の鉛直積分と考えることができる．したがって用語の濫用であるが，

静水圧平衡と層厚

定理 19

気圧座標での静水圧平衡，

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \quad あるいは \quad \frac{\partial\phi}{\partial \ln p} = -RT \tag{4.10}$$

の左辺を層厚に微分に対応させると層圧の微分は温度に比例する．

一方，温位 θ の定義式を用いれば，式(4.10)は

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p}\theta \tag{4.11}$$

となるので与えられた等気圧面でのわずかな層厚はまた温位にも比例することがわかる．

等温度大気の場合，対数気圧座標系で定義された高度を幾何高度と区別するため z^* と書くと式(4.10)に関して $\Delta \ln p = -g\Delta z^*/RT_0$ がなりたつので，

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = g\frac{T}{T_0} \tag{4.12}$$

と変形される．例 15において等温度大気 $(T = T_0)$ は順圧大気であったので，式(4.12)は等温度大気という順圧大気からのずれとして傾圧大気の度合いを評価しており，対数気圧座標系におけるジオポテンシャルの鉛直微分は傾圧度を評価するものである．$T = T_0$ なる大気ならば順圧でありジオポテンシャル高度と対数気圧高度は完全に一致する．大気が T_0 と違った順圧大気場である場合もあるので留意が必要である．

一方で式(4.11)に関して等温位大気 $\theta = \theta_0 = \mathrm{const.}$ とおき，つぎのように式を変形する

$$\mathrm{d}z_a = -\frac{R\theta_0}{g p_s^{R/c_p}} p^{R/c_p - 1}\,\mathrm{d}p \tag{4.13}$$

ここで z_a は等温位大気の場合の擬高度でありこれももはやジオポテンシャル高度に対応していない．この式は解析的に積分ができ，$z = 0,\ p = p_s$ から $z_a = z_a,\ p = p$ まで積分すると，

$$z_a = \frac{c_p\theta_0}{g}\left[1 - \left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p}\right] \tag{4.14}$$

と等温位大気での鉛直座標を定義できる．ここで乾燥断熱気温減率が $\Gamma_{da} = g/c_p$ で得ら

れることを思い出せば，式(4.14)は

$$z_a = \frac{\theta_0}{\Gamma_{da}}\left[1 - \left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p}\right] \tag{4.15}$$

となってスケーリングファクタ $H_a = \theta_0/\Gamma_{da}$ は $\theta_0 = 288$ [K]，$\Gamma_{da} = 9.8$ [K/km] とすれば，$H_a = 29.4$ [km] となる．

一方式(4.11)から等温位大気においてジオポテンシャル高度が擬高度になることで静水圧平衡が

$$\frac{\partial g z_a}{\partial p} = -\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_s}\right)^{R/c_p}\theta_0 \tag{4.16}$$

と書けるのでもとの式と比較すれば，

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_a} = g\frac{\theta}{\theta_0} \tag{4.17}$$

がえられる．ここで例 16から等温位大気は順圧大気であったので等温度大気と同様，静水圧平衡は順圧大気からどのくらい離れているか評価するものである．さらに右辺は鉛直浮力として理解されることから浮力は傾圧大気を特徴付ける現象であることがわかる．式(4.17)を再び鉛直微分すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_a^2} = \frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial z_a} \approx N^2 \tag{4.18}$$

がえられ，ジオポテンシャルの鉛直方向の二回微分は静的安定度に関連するブルント・バイサラ振動数 (浮力振動数) となる．

気圧面上では一般に順圧ではないが，状態場をつぎのように分解すると順圧成分と傾圧成分に分解できる．

順圧成分と傾圧成分への分解

定理 20

気圧座標系においてつぎの状態場 S(密度 ρ，温度 T，温位 θ) をつぎのように分解すると順圧成分と傾圧成分に分解できる:

$$S(x,y,p,t) = \underbrace{\overline{S}(p,t)}_{\text{順圧成分}} + \underbrace{S'(x,y,p,t)}_{\text{傾圧成分}} \tag{4.19}$$

系 21 (等圧面上に状態場のコンターが存在すれば傾圧的)

等圧面上に上に挙げた状態場 S のコンターがあればその部分では大気が傾圧的で

ある．つまり等圧面と等 S 面が交差している．

《Proof》

気圧座標系において温度 $T = T(x, y, p, t)$ を

$$T = \overline{T}(p, t) + T'(x, y, p, t) \tag{4.20}$$

と分解する．ナブラ作用素 ${}_z\nabla_3$ を高度座標系での三次元ナブラ (第 2 節の ∇_3)，

$${}_z\nabla_3 := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{4.21}$$

と定義して，式(4.19)について勾配をとり，さらに左から ${}_z\nabla_3 p$ をベクトル積すると，左辺は傾圧的であるが，右辺はそれぞれ，

$${}_z\nabla_3 p \times {}_z \nabla_3 \overline{T}(p) = {}_z\nabla_3 p \times \frac{\partial \overline{T}}{\partial p}{}_z\nabla_3 p = 0, \tag{4.22}$$

$${}_z\nabla_3 p \times {}_z\nabla_3 T'(x, y, p, t) \neq 0 \tag{4.23}$$

となり右辺第一項は順圧的，第二項は傾圧的である．第二項に注目すると T' の x, y 依存性によって傾圧性が実現されていることから等圧面上に等温線が存在すると傾圧性が存在していることを表している．

密度に関しても同様の議論がなされる．

一方，温位については温位の定義から $\theta = \theta(T, p)$ という函数をとらえることができ，勾配をとると，

$${}_z\nabla_3 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial T}{}_z\nabla_3 T + \frac{\partial \theta}{\partial p}{}_z\nabla_3 p \tag{4.24}$$

となる．ここで気圧勾配を作用されると右辺第二項は 0 となる．いま $\theta = \overline{\theta}(p, t) + \theta'(x, y, p, t)$ と分解すると，温度 T の順圧・傾圧分解と同様の議論で $\overline{\theta}(p, t)$ は順圧成分，$\theta'(x, y, p, t)$ は傾圧成分となる．実際，温位の順圧成分と傾圧成分は,

$$\overline{\theta}(p, t) = \overline{T}(p, t) \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \tag{4.25}$$

$$\theta'(x, y, p, t) = T'(x, y, p, t) \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \tag{4.26}$$

で与えられる． □

定理 20によれば，高層天気図 (気圧座標系を利用) にみられる等温線や等温位線は傾圧成分の射影にすぎない．したがって順圧成分は implicit となっている．しかし順圧成分の温度を間接的に捉える方法として等圧面の平均高度である．平均高度が高いと平均気温が高いことを示し，平均高度が低いと平均気温が低いことを示している．気象予報の文脈によれば日本付近では亜熱帯高気圧に覆われていると判断できる 500hPa 面 5880m 線は平均気温が高いことが伺え，さらに夏において猛暑になっているときは 500hPa 面のジオポテンシャル高度が高いことが多い．一方，傾圧成分の射影であることから等圧面天気図において等温度線や等温位線が集中している場所は傾圧性が高いことを示唆できる．ここでは，等温度面や等密度面，等温位面が気圧面に対してまわりより大きく斜交しており，式(2.8)から大気に循環を発生させようとする力がはたらいている．これは簡単な例として，容器に水と油を入れて，圧力面は当然鉛直下向きのほうが高いが，密度勾配に関しては水の上に油を配置すると圧力勾配と密度勾配がほぼ同じ向きを向いており安定であることがわかるが，逆に油の上に水をおけば圧力勾配と密度勾配が反対の向きを向いており容器内の鉛直方向に循環の傾向が大きい．実際大気においては完全に鉛直な循環の傾向ではなく，傾圧帯において気圧勾配と密度勾配の傾きが大きい場所において循環傾向が大きいとと考えられる．なお大気内には静的不安定によって発生しようとする循環に対する復元力がはたらき，閾値を超えるような循環傾向がなければ発生した循環はもとに戻ろうとする．一方閾値を変えると循環が大きくなり，鉛直方向の安定性から鉛直方向の循環ではなく傾いた水平方向の「対流」が発生するとと考えられる．これは傾圧不安定波のナイーブな解釈と言えよう．

温度風と順圧・傾圧性との関連に注目する．温度風とは地衡風の鉛直シアのことを指す．

地衡風

定義 22

地衡風とは水平気圧勾配力とコリオリ力がつりあうような風であり数式にすると，

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_g = -\nabla_p \phi \tag{4.27}$$

と書かれる．ここで $\boldsymbol{u}$ は二次元流とし，添字の $_g$ は地衡的であることを示し，$\boldsymbol{k}$ は鉛直上向きの長さが 1 のベクトル，∇_p は等圧面水平ナブラ，コリオリパラメー

タ (惑星渦度) $f = 2\Omega\sin(\varphi)$(φ は緯度) である．これを成分表示すると，

$$u_g = -\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{4.28}$$

$$v_g = \frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{4.29}$$

である．

地衡風と静水圧平衡には密接な関係がある．

静水圧平衡と地衡風

定理 23
静水圧平衡大気の定常流は地衡風である．逆に地衡風ならば定常流で静水圧平衡である．

この定理の証明はスケール分析が必要であり，テーマから大きく外れるので参考に証明の概略を書く．

《証明の概略》

静水圧平衡大気の運動方程式は鉛直加速度が 0 である．ここで水平加速度項を 0(速度は 0 としない！) とするとコリオリ力と気圧勾配力がつりあい，地衡風解となる．

逆に地衡風であると仮定する．このとき無次元した運動方程式系 (静水圧平衡はいれていない) に関して地衡風であったので風全体に対する非地衡風の割合であるロスビー数 $Ro = U/fL$ についてを $Ro \to 0$ とするために $U \neq 0$ かつ f は与えられているので $L \to \infty$ を与えられればいい．このとき RoH/L のファクタがついている鉛直加速度と Ro のファクタの水平加速度がその極限で 0 になるが，鉛直方向に関しては静水圧平衡となり，水平・鉛直加速度が 0 になり定常流である． □

静水圧平衡の定常流が地衡風，逆も然りであることがわかったので地衡風平衡に関して静水圧平衡を用いて温度風の式を得よう．まずは気圧座標系を考えよう．地衡風 (式(4.27)) を鉛直微分すると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial p} = -\boldsymbol{k}\times\frac{1}{f}\nabla_p\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) \tag{4.30}$$

となる．ここで静水圧平衡を適用すると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial p} = \frac{R}{fp}\boldsymbol{k} \times \nabla_p T \tag{4.31}$$

となり温度風の式が得られる．

温度風平衡

定理 24
温度風平衡の式は地衡風平衡と静水圧平衡によって得られる地衡風鉛直シアと (気圧面上の) 温度水平勾配を結びつける式である：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial p} = \frac{R}{fp}\boldsymbol{k} \times \nabla_p T \tag{4.32}$$

あるいは成分表記すると，

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{4.34}$$

となる．ほかの座標系においてもその座標系での地衡風平衡と静水圧平衡を結びつけることで温度風平衡がえられる．

温度風平衡は速度場と状態場を直接結びつける式である．温度風平衡の解釈として，温度水平勾配による密度的なトルクに対する鉛直地衡風シアに関するコリオリ力のシアによるトルクとの平衡と考えることができる．

いま地衡風は静水圧平衡の定常流であった．したがって大気における定常流解として地衡風解が得られる．地衡風に対する流れの安定性として水平シア不安定性である順圧不安定と鉛直シア不安定性である傾圧不安定が挙げられる．とくに傾圧不安定は温度風と深く結びついており，撹乱に対して温度風平衡が破れることで不安定性が実現する．

順圧大気の温度風が 0 であること

定理 25
順圧大気では温度風が 0 である．これは地衡風の向きおよび大きさが鉛直方向に変わらず流れは鉛直的に一様な流れとなる．つまり順圧的な地衡風は二次元流に帰着する．

《Proof》

定理 20より順圧大気では温度が $T = T(p)$ となる．この場合 $\nabla_p T = 0$ であり，温度風は 0，すなわち $u_g(x, y, p, t) = u_g(x, y, t)$[*1]に帰着し順圧大気では地衡風は二次元流と解釈される． □

ここでいくつか注意を挙げる．

注意 26

順圧大気では流れは二次元流とはならない．地衡風場では二次元流に帰着するが非地衡風は三次元のままである．

注意 27

二次元流地衡風場は発散ゼロではない．実際 β 効果により地衡風に関して鉛直流の励起が起こるがこれは非地衡風がある．

しかしふたつ目の注意に関して $f = f_0 = \mathrm{const.}$ ならば順圧地衡風は非発散的な流れとなり，流れ全体として二次元流のように振る舞う．

テイラー・プラウドマンの定理

定理 28

f_0 面つまり実効自転効果 (自転角速度ベクトルの鉛直射影が寄与) が一定な順圧大気において流れは二次元的になる．

系 29 (テイラー柱)

水底に障害物があり，流れが地衡流的であれば障害物の影響を直接受けない上方でも障害物を迂回するような流れが生じる．

順圧地衡風場が二次元流のように振る舞うことから，傾圧大気において順圧成分と傾圧成分に速度場とジオポテンシャル場を分解できる．

地衡風場とジオポテンシャル場の順圧・傾圧分解

定理 30

地衡風場 $\boldsymbol{u}_g = \boldsymbol{u}_g(x, y, p, t)$ とそれに付随するジオポテンシャル場 $\phi =$

*1 時間依存性は与えられる ϕ の時間依存性に起因するものであり，時間発展性はないものの各時刻で与えられる ϕ が変化すると同時に地衡風に反映される．なお ϕ の変動は非地衡風によって時間発展する

$\phi(x,y,p,t)$ について，

$$\boldsymbol{u}_g(x,y,p,t) = \overline{\boldsymbol{u}_g}(x,y,t) + \boldsymbol{u}'_g(x,y,p,t) \tag{4.35}$$
$$\phi(x,y,p,t) = \overline{\phi}(x,y,p,t) + \phi'(x,y,p,t) \tag{4.36}$$

ただし，

$$\overline{\boldsymbol{u}_g} = \frac{\int \boldsymbol{u}_g \,\mathrm{d}p}{\int \mathrm{d}p} \tag{4.37}$$
$$\overline{\phi} \quad \text{such that} \quad f\boldsymbol{k} \times \overline{\boldsymbol{u}_g} = -\nabla_p \overline{\phi} \tag{4.38}$$
$$\boldsymbol{u}'_g = \boldsymbol{u}_g - \overline{\boldsymbol{u}_g} \tag{4.39}$$
$$\phi' = \phi' - \overline{\phi} \tag{4.40}$$

と分解すると，$\overline{\boldsymbol{u}_g}, \overline{\phi}$ は順圧成分，$\boldsymbol{u}'_g, \phi'$ は傾圧成分となる．

《Proof》

$\overline{\boldsymbol{u}_g}$ と $\overline{\phi}$ が順圧場にあることを示す．$\overline{\boldsymbol{u}_g}$ の定義から p によらないことから鉛直微分をすると温度風が 0 となる．ここで定理 25から順圧的といえる．また $\overline{\phi}$ は順圧地衡風に対応しておりこれもまた順圧場といってもよい． □

もしジオポテンシャルに関して更に $\overline{\phi}(x,y,p,t) = \phi_R(p) + \tilde{\phi}(x,y)$ とすれば，気圧座標系では静水圧平衡が仮定されてあることから，$\phi_R(p)$ は静止大気場のジオポテンシャルとなる．なぜなら $\phi_R(p)$ は水平気圧勾配力がゼロであり，定義から地衡風に付随するがこのとき地衡風速度が 0 と帰結されるためである．

まとめると，ジオポテンシャル場はつぎのように分解できる:

$$\phi = \underbrace{\phi_R(p)}_{\text{基準大気}} + \underbrace{\tilde{\phi}_g(x,y,t)}_{\text{順圧地衡風成分}} + \underbrace{\phi'_g(x,y,p,t)}_{\text{傾圧地衡風成分}} + \underbrace{\phi'_a(x,y,p,t)}_{\text{残差成分}} \tag{4.41}$$

ここで順圧地衡風成分は順圧大気において温度風が 0 であることから $\tilde{\phi}_g$ は p に依らないことがわかり，順圧ジオポテンシャル場に関して式(4.41)のようにしてよい．この事実から順圧地衡風場においてジオポテンシャルの基準大気からの偏差も二次元的になり，温度や温位についても水平方向の依存性がないことから順圧地衡風問題は二次元流の問題に帰着し，順圧的な波動 (順圧ロスビー波) に関して温度場や温位場の波動がなくジオポテンシャルの波動のみで考えることができる．このため二次元流地衡風の流れの安定性問題であり地衡風に対する順圧不安定は状態場に依存しない流れ場のみの安定性問題として認識

される．

これらの項に関して地衡風 β 効果の存在によって基準大気以外は相互作用する．しかし準地衡風系においては $f = f_0 + \beta y$ と β 平面で考え，地衡風の定義において $f \to f_0$ とするために順圧地衡風成分が非発散的になることから傾圧地衡風成分と非地衡風成分とのやりとりが発生する．これは準地衡系において鉛直流の発生や前線形成，傾圧不安定などで鍵となるポイントである．

このような議論から定理 30と定理 20は互いに整合的である．

順圧大気では温度のゆらぎ (基準大気からの偏差) がなく速度場とジオポテンシャルのみで記述されることを示そう．温度 $T = \overline{T}(p,t) + T'(x,y,p,t)$ と記述できるが気圧座標系の熱力学第一法則，

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \sigma_p \omega \tag{4.42}$$

より $\overline{T}$ の水平微分がないことから

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(p,t) = \sigma_p \omega(p,t) \tag{4.43}$$

となり等圧面温度が上昇 (下降) するとき水平一様な断熱圧縮 (冷却) が発生すると考えられ，順圧大気の水平成分の擾乱はない．また温位に関して式(4.25)が順圧成分の温位を表しているので気圧面上に温位の擾乱も存在しない．

一方，傾圧成分に関しては水平勾配があることから移流項は 0 ではない．これは傾圧性波動においては温度場あるいは温位場の波動があることも示唆される．

さてここからは気圧座標系から離れて擬高度を用いた座標 (式(4.4),(4.14)) で同様の議論を行おう．これらの座標系は p の函数で得られるため等鉛直座標面は気圧面と平行であった．したがって気圧座標系と同様の定理がなりたつ．ここでは式(4.14)の座標を用いて z と書くこととする．この z はジオポテンシャル高度とは違うことに注意しよう．この座標系では温位 θ を $\theta = \overline{\theta}(z) + \theta'$ と分解すれば定理 20と同様にして右辺第一項を順圧成分，右辺第二項を傾圧成分とみることができる．一方水平速度場やジオポテンシャルに関して

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{u}_g}(x,y,t)}_{\text{順圧地衡風}} + \underbrace{\boldsymbol{u}'_g(x,y,z,t)}_{\text{傾圧地衡風}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_a(x,y,z,t)}_{\text{非地衡風}} \tag{4.44}$$

や

$$\phi = \underbrace{\phi_R(z)}_{\text{基準大気}} + \underbrace{\tilde{\phi}_g(x,y,t)}_{\text{順圧地衡風成分}} + \underbrace{\phi'_g(x,y,z,t)}_{\text{傾圧地衡風成分}} + \underbrace{\phi'_a(x,y,z,t)}_{\text{残差成分}} \tag{4.45}$$

と分解できる．

この座標系における静水圧平衡は式(4.17):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = g\frac{\theta}{\theta_0} \tag{4.46}$$

であった．この式から左辺は温位に比例することがわかる．一方右辺は等温位 θ_0 の順圧大気からのずれでパーセルの浮力に近似されるから $\theta(x,y,z,t) = \theta_R(z) + \theta'(x,y,z,t)$ と分解する．温位保存則 (断熱)，

$$\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{4.47}$$

と式(4.46)と組み合わせると，ここで $\theta' \ll \theta_R$ であることに注意して

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(g\frac{\theta'}{\theta_0}\right) = -\frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta_R}{\mathrm{d}z}w \tag{4.48}$$

となる．ここで浮力 b とブルント・バイサラ振動数 (静的安定性のパラメータ) N を

$$b := g\frac{\theta'(x,y,z,t)}{\theta_0} \tag{4.49}$$

$$N := \sqrt{\frac{g}{\theta_R}\frac{\mathrm{d}\theta_R}{\mathrm{d}z}} \approx \sqrt{\frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta_R}{\mathrm{d}z}} \tag{4.50}$$

とすれば，式(4.48)は

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla b' = -N^2 w \tag{4.51}$$

となる．一方静水圧平衡から

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = b' \tag{4.52}$$

となって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = -N^2 w \tag{4.53}$$

ともかけることに注意しよう．

b' は θ' に比例することから傾圧成分的な量であるとと考えられる．したがって浮力は傾圧成分に属する．一方静水圧平衡から温位がまわりより高い場所では層厚が大きく，温位がまわりより低い場所では層厚が小さいことがわかる．これは暖かい空気が膨張的で冷たい空気が収縮的であると整合性がある．熱力学第一法則によれば浮力が発生すると周囲にゆらぎが発生することが予想できるだろう．たとえば浮力が高くなった場所ではまわりより密度が低く空気が軽いためまわりから空気が流れ込むことで質量の再分配が行われる．周囲にでんぱする波動は傾圧成分の温位が絡んでおり傾圧的な波動である．実際温位

のゆらぎによって層厚がふくらんでそれを復元させるために周囲に伝播する波を「重力波」とよび復元力として重要なパラメータにブルント・バイサラ振動数 N があって密度成層と深く関連する．

温度風平衡を書き換えてみよう．地衡風平衡は式(4.27)と同様，

$$\boldsymbol{u}_g = -\frac{\boldsymbol{k}}{f} \times \nabla_z \phi \tag{4.54}$$

によって与えられる．ここで ∇_z は等擬高度面上の水平ナブラである．これを鉛直微分し静水圧平衡を代入すると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial z} = -\frac{g\boldsymbol{k}}{f\theta_0} \times \nabla_z \theta \tag{4.55}$$

で得られるが，テイラー・プラウドマンの定理と同様に温位の傾圧成分のみが温度風を実現していることがわかる．また浮力 b' の定義式から

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial z} = -\frac{\boldsymbol{k}}{f} \times \nabla_z b' \tag{4.56}$$

と表すことができ，浮力の水平非均一性が温度風を実現すること，あるいは質量の水平非均一性が温度風を実現することが読み取れる．このような質量の水平非均一性によるトルクの発生に対して地衡風平衡と静水圧平衡の元に地衡風によるコリオリ力トルクと拮抗するのが温度風平衡と解釈されるのであった．

ここでの議論を定理にしよう:

順圧大気と傾圧大気の運動

定理 31

静水圧平衡のもとで順圧大気と傾圧大気の流れはつぎのように振る舞う

- 順圧大気では地衡風場とジオポテンシャル場が二次元的に運動する．したがって二次元流と考えて良い．
- 傾圧大気では各気圧面でのジオポテンシャルがばらばらに運動し温度 (温位) 場の変動も伴い，三次元的な流れである．

5 等価順圧大気

ここまでの議論は順圧大気と傾圧大気であったが，ここでは傾圧大気の中でも順圧大気のように振る舞う等価順圧大気について議論する．鉛直座標系は式(4.14)を採用する．

等価順圧大気

定義 32

等価順圧大気(equivalent barotropic) (Charney et al. 1950) は地衡風 $\boldsymbol{u}_g$ がある鉛直構造函数 $A(z)$ とともに

$$\boldsymbol{u}_g(x, y, z, t) = A(z)\,\boldsymbol{u}_{gM}(x, y, t) \tag{5.1}$$

で与えられるような大気である．ただし $\boldsymbol{u}_{gM}$ は順圧地衡風，

$$\boldsymbol{u}_{gM}(x, y, t) = \frac{1}{H}\int_0^H \boldsymbol{u}_g\,\mathrm{d}z \tag{5.2}$$

である．

鉛直構造函数 $A(z)$ の平均値は 1 である，すなわち

$$\frac{1}{H}\int_0^H A(z)\,\mathrm{d}z = 1 \tag{5.3}$$

これは式(5.2)を(5.1)に代入することでえられる．

等価順圧大気におけるジオポテンシャルを考えよう．いまジオポテンシャル ϕ を $\phi = \phi_R(z) + \phi'(x, y, z, t)$ と分解すると地衡風に寄与するのは ϕ' である．さらに $\phi' = B(z)\phi_{gM}(x, y, t)$ と分解し，地衡風平衡

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u} = -\nabla_z\phi \tag{5.4}$$

に式(5.1)と(5.4)を代入すると

$$fA(z)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_{gM} = -B(z)\nabla_z\phi_{gM} \tag{5.5}$$

となるが，$\boldsymbol{u}_{gM}$ は順圧地衡風であったので式(4.38)と式(4.41)から

$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_{gM} = -\nabla_z\phi_{gM} \tag{5.6}$$

がなりたつので結局 $A(z)=B(z)$ と決定する．結論として，等価順圧大気のジオポテンシャルは

$$\phi=\phi_R(z)+A(z)\phi_{gM}(x,y,t) \tag{5.7}$$

と決定される．

温位偏差に関しては静水圧平衡を用いることで求められる．つまり，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial z}&=\frac{\mathrm{d}\phi_R(z)}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\phi_{gM}(x,y,t)\\&=g\frac{\theta_R}{\theta_0}+g\frac{\theta'}{\theta_0}\end{aligned} \tag{5.8}$$

と温位偏差は

$$\frac{\partial\phi'}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\phi_{gM}(x,y,t)=g\frac{\theta'}{\theta_0} \tag{5.9}$$

となる．

等価順圧大気を特徴づける定理を紹介しよう．

等価順圧大気は傾圧大気の一種である

定理 33

等価順圧大気は傾圧大気の一種である．

《Proof》

等価順圧大気において擬高度 z 面上に等温位線がみつかる場合が傾圧大気である．いま式(5.9)に関して z 面の水平勾配を行うと

$$\nabla_z\phi_{gM}\neq 0 \tag{5.10}$$

がわかり等 z 面 (等圧面) 上に等温位線がみられ傾圧性をもっていることがわかる． □

気圧面での等高線と等温線が平行である

定理 34

等価順圧大気での任意の等圧面において等高線と等温線は平行である．

《Proof》

式(5.9)(運動場の静水圧平衡) のジオポテンシャルに式(5.7)の右辺第二項を代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\phi_{gM}(x,y,t)=\frac{g}{\theta_0}\theta' \tag{5.11}$$

この式に ∇_z による勾配を行うと

$$\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\nabla_z\phi_{gM} = \frac{g}{\theta_0}\nabla_z\theta' \tag{5.12}$$

となる．この式から任意の気圧面で $\nabla_z\phi gM \parallel \nabla_z\theta'$ であることがわかり，等ジオポテンシャル線と等温位線は平行，すなわち等圧面で等高線と等温線が平行であることがわかる． □

つぎのふたつの定理は傾圧大気の一種である等価順圧大気が順圧大気のように振る舞うことを述べたものである．

等価順圧大気の温度風は鉛直方向的に向きが平行にある

定理 35
等価順圧大気の温度風の鉛直プロファイルは向きが平行にあり，その向きは等高線と等温線と平行である．

《Proof》
温度風平衡は式(4.55)，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial z} = -\frac{g\boldsymbol{k}}{f\theta_0}\times\nabla_z\theta \tag{5.13}$$

で与えられていたが，$\boldsymbol{u}_g = A(z)\boldsymbol{u}_{gM}$ を代入すると，θ の水平勾配の寄与は θ' に限ることに注意して

$$\frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{u}_{gM} = -\frac{g\boldsymbol{k}}{f\theta_0}\times\nabla_z\theta' \tag{5.14}$$

である．主張の前半部分に注目すると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_g}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}A(z)}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{u}_{gM} \tag{5.15}$$

となるがこの式から温度風と地衡風が平行であることがわかる．一方，

$$\boldsymbol{u}_{gM} = -\frac{\boldsymbol{k}}{f}\times\nabla_z\phi \tag{5.16}$$

であったので温度風は等高線，そして等温位線 (これは温度風の一般的性質である) と平行であることがわかる． □

等価順圧大気と温度移流

定理 36
等価順圧大気において地衡風による温度 (温位) 移流はゼロである．

《Proof》
地衡風による温位移流は

$$-\boldsymbol{u}_g \cdot \nabla_z \theta \tag{5.17}$$

で与えられるが，地衡風平衡から

$$\frac{\boldsymbol{k}}{f} \times \nabla_z \phi' \cdot \nabla_z \theta \tag{5.18}$$

となる．ここで定理 34から $\nabla_z \phi' \parallel \nabla_z \theta$ であったので結局 $\boldsymbol{u}_g$ と $\nabla_z \theta$ は直交し地衡風による温度移流はゼロである． □

等価順圧大気を特徴づける定理として定理 33と定理 36があり，前者は等価順圧大気が傾圧大気の一種であることを述べており，後者は順圧大気のように振る舞うことを述べている．順圧大気のように振る舞うとはどういうことか？等価順圧大気は傾圧大気であるため温度風はゼロではない，一方等価順圧大気において等ジオポテンシャル面と等温面が平衡であることが成り立っておりこの定理から地衡風と温度風が平行であり，温度風の鉛直シア (地衡風の鉛直二階微分) は向きを変えない．この性質から地衡風による温度移流はゼロであることを述べている．いま傾圧ロスビー波を考えよう．傾圧ロスビー波とはジオポテンシャルの波動だけではなく温位 (温度あるいは層厚) の波動を伴っており気圧的な擾乱と温度的な擾乱をもっている．傾圧ロスビー波には不安定性が存在し，この波は傾圧不安定ロスビー波とよばれ傾圧不安定波 (これは f_0 面でもみられる) とロスビー波が組み合わさったモードである．東西方向に進行する傾圧ロスビー波が増幅する際ジオポテンシャルの波動に対して温位の波動は波長の $1/4$ 分西側にある．このような位相の違いによって西向き運動量と熱を極向きに輸送する．このジオポテンシャルと温位の波動のずれは鉛直的にも波動のずれがあり両者の波動が共鳴することで不安定波が引き起こされることといわれており，言い換えると波どうしの正のフィードバックがはたらいていることを示している．しかし波が成長あるいは減衰しないモードとして中立モードがある．この場合ジオポテンシャル擾乱と温位擾乱の位相は一致しており正あるいは負のフィードバックがはたらかない．両者の擾乱が一致するとき，気圧面上で等高線と等温位線が平行するという等価順圧的な性質をもっている．この場合の中立ロスビー波の伝播性質として順圧大気のロスビー波 (中立モードのみ) の伝播性質に近い．