

# 大気放射の基礎

坂浦いと

2025年8月14日

## はじめに

気象学は大きく力学と物理に分けられる。力学では流体力学をベースに展開される気象学の主要な分野である。そこでは大気の動力学 大気のゆらぎに関して着目するものである。一方物理では、力学では説明ができない部分、大気放射や雲微物理学、大気化学などに関して説明をする。

図1は数値予報において考慮される過程である。力学過程(大気流体力学)は方程式系において直接時間発展(予報)することでもとめられる。一方、外力項は物理過程によって診断される。

予報は前の時刻  $t - \delta t$  を引数に力学法則(方程式系)にしたがってつぎの時刻  $t$  を計算することでステップごとに未来の気象を予測することである。一方診断は同時刻  $t$  における気象の物理量を引数に、おもに力学過程では直接予報することができない放射過程や雲・降水過程や大気境界乱流に関してパラメタライズしていくことである。

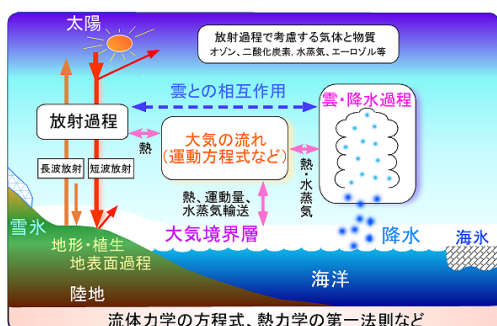


図1 数値予報モデルで扱う主な過程 (令和6年度気象庁数値予報解説資料より引用)

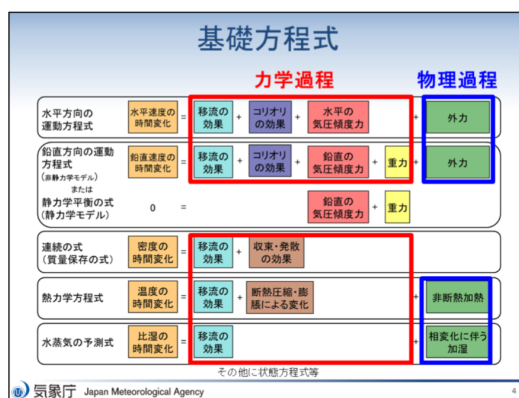


図2 数値予報の基礎方程式の模式図 (令和6年度気象庁数値予報解説資料より引用)

私の感想であるが、気象学に関しては流体力学の派生であるというイメージがあり大気

流体力学が気象現象をすべて予測してくれるという過大評価がある気がする。事実流体力学を用いて天気を予想することができることは確かに野心に満ち溢れていてそこから大気力学に関心をもつ人がいる (私もそうだった!)。しかし気象システムは複雑系であり、どうしても流体力学だけでは限界な部分があるので、ほかの分野を輸入してパラメタライズやモデル化、簡略化が重要となる。

大気科学、流体力学において動力学、つまりよく扱うのは変動の部分である。そのため偏差によく着目する。しかし偏差はどこからずれているのかは流体力学の範疇からは議論することがなかなか難しい。その平均場はどこからきた? 気候システムの大域平衡状態はどうやって保たれている? その疑問は流体力学の限界を感じたときに我々に問いかけてくる。

大気放射過程は、地表面や大気の**全領域**で**連続的**かつ**大域的**にわたるエネルギー交換過程であり、これは大域的 (グローバル) に地球の気候システムの平衡場を規定するものである。

現代、地球温暖化やらで社会は騒いでいる。そこで活動家は無闇矢鱈に地球を守れ! 気候システムがどうだこうだといって騒ぎ立てている! でも待てよ! なにが気候システムを創造しているのか? その主たるものは放射過程である! 温室効果、これは大気放射学が取り扱える内容である。グローバルなエネルギー輸送形態を語るのに大気放射学は避けては通れない!

さて大気放射学のゲートを開こう!

## 1 放射と電磁波

放射は電磁波として記述できる。光は電磁波である。

### 1.1 周波数と波数

電磁波は周波数  $\nu$  や波長  $\lambda$  によって、紫外線、可視光線 (我々がみる光)、赤外線、マイクロ波など分けられる。

周波数  $\nu$  は一秒に何回振動するか、波長  $\lambda$  はひとつの波の長さである。派生して周期は周波数の逆数として一回の振動に要する時間、波数は波長の逆数で単位長さにいくつの波が入るかを意味する。

ここで光速  $c$  は次の**常数**である。

$$c = 299,792,458 \text{ [ms}^{-1}\text{]} \quad (1.1)$$

である。これは地球が自転や公転していても観測系によらず一定値である。ここで光速と周波数と波長は

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (1.2)$$

の関係で結ばれる。

波長に合わせて電磁波は以下の名前がついている:

- ガンマ線: 波長-0.01 nm
- X 線: 波長 0.01-10 nm
- 紫外線: 波長 10-380 nm 特に大気放射において重要なのは
  - UV-A (315-380nm)
  - UV-C (280-315nm)
  - UV-A (200-280nm)
- 可視光線: 波長 380-760 nm
- 赤外線は: 波長 760nm - 1000 $\mu$ m
  - 近赤外線 0.76-4 $\mu$ m
  - 熱赤外線 4-50 $\mu$ m
  - 遠赤外線 50-1000 $\mu$ m
- マイクロ波: 波長 1000 $\mu$ m

と分類される。

## 1.2 電磁波の数式的記述

### 1.2.1 Maxwell 方程式

電磁波は電場と磁場の波動である。電場と磁場は Maxwell の方程式によって記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{電場に対する Gauss の法則}) \quad (1.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁場に対する Gauss の法則}) \quad (1.3b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday-Maxwell の電磁誘導の法則}) \quad (1.3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Amperè の法則}) \quad (1.3d)$$

で表される。ここで  $\mathbf{D}$  は電束密度,  $\mathbf{E}$  は電場,  $\mathbf{B}$  は磁束密度,  $\mathbf{H}$  は磁場,  $\rho$  は電荷密度,  $\mathbf{J}$  は電流密度を表す。ここで線形的媒質では,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0(1 + \chi) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.4)$$

という関係がなりたつ。ここで  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率,  $\varepsilon$  は媒質の誘電率,  $\chi$  は媒質の電気感受率,  $\mu$  は媒質の透磁率,  $\sigma$  は媒質の電気伝導率をしめす。

大気中では局所的に電荷がつりあっており  $\rho = 0$  としてよい。したがって Maxwell 方程

式は,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.5c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_0(1 + \chi) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.5d)$$

となる。この方程式の従属変数は電場と磁場,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  であり, 媒質を特徴付ける量として  $\sigma, \chi, \mu$  となる。ここから解を探っていこう。

### 1.2.2 電磁波 (平面波) の解

ここで平面波として,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (1.6)$$

を仮定する。ここで  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i$  は複素波数ベクトルであり,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}) \exp[i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (1.7)$$

となる。したがって複素波数の実部は空間的周期構造, 虚部は空間的振幅減衰に寄与する。

## 2 大気放射の記述

大気放射は大気中や大気内外の**エネルギー輸送**を記述する分野である。しかし電磁気学的に電磁波として記述することはいささか不便である。なぜなら大気の電磁的媒質を知る必要があるためである。我々は気象学で取り扱う範囲の物理量から大気放射の振る舞いを診断したいという目的があり, またエネルギー論を設立するという目標がある。そのために電磁気学を経由することは冗長的であり, エネルギー論を中心に議論することが難しくなる。そのために大気放射のエネルギー論としてどうやって議論すべきか?

結論をいうと, 大気放射 (電磁気) をエネルギーのフラックスとして記述することで大気のエネルギー論的側面を強調することが可能になる<sup>\*1</sup>。

フラックス (密度) を  $F$  とすると電磁波学では Poynting ベクトルの一周期平均として

$$F = \langle S \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle \quad (2.1)$$

として扱われるものであった。真空中の平面波でのフラックスの大きさは

$$F = \frac{1}{2} c \varepsilon E^2 \quad (2.2)$$

<sup>\*1</sup> 大気放射全体がこのような記述ですべてを攻略できるわけではない。観察する対象に合わせて仮定や設定は適切に立てる, 選ぶべきである。

というかんたんな形になる．いま電場  $E$  と磁場  $H$  を

$$E = E_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad H = H_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.3)$$

のように平面波とすれば，複素波数  $k$  が実数ならば

$$F = E_0 \times H_0 \quad (2.4)$$

であり，波数が複素数ならば振幅の減衰がたしかめられる．結果としてフラックスは振幅の二乗であるパワーに比例することがわかり，周期性を含まないため数理的扱いが便利である．しかし大気放射においては大気中の粒子（原子分子やエアロゾル粒子）などの吸収，射出そして散乱や屈折を考えることが多く，これらの現象は放射の波長に依存する．

ここで波数ベクトルは波数と伝播方向に分解できるため， $k = ki$  とすれば電場と磁場，電磁波の伝播方向は  $i$  となり，波長  $\lambda$  は  $\lambda = 1/k$  であたえられる．

ここで電磁波に対して電場と磁場には重ね合わせの原理，

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty E_\lambda d\lambda \\ H &= \int_0^\infty H_\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (2.5)$$

が成立する．ここで  $E_\lambda, H_\lambda$  は波長  $\lambda$  だけの電磁波，単色波 (monochromatic wave) を表している．したがってフラックス密度は

$$F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda \quad (2.6)$$

のように重ね合わせで表示できる．ここで  $F_\lambda = \langle E_\lambda \times H_\lambda \rangle$  である．

一方で式(2.6)をみると， $F_\lambda$  は  $F$  に対して分布函数として解釈ができるだろう．ここでフラックスのうちある波長域を取り出したものとして分光フラックス (spectral flux) として，

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F_\lambda d\lambda \quad (2.7)$$

と定義できる．さらに  $F_\lambda$  は単色フラックス (monochromatic flux) として

$$F_\lambda = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (2.8)$$

として分光フラックスの微分として，フラックスの分布函数として考えられる．

しかしここで伝播の方向  $i$  はどのように陽的に記述するかが問題となる．一見するとそのまま電磁波の伝播方向として  $i$  を定義すればいいが平面波ならその方向は一様であるが，実際の大気放射はさまざまな方向をとり  $i$  に関してなにか自然な取り扱いをしたい．ここで観測者に対して向かってくるフラックスおよび遠ざかるフラックスとして考える．その記述には立体角の知識が必要となる．

立体角は単位が  $\text{Sr}$ [ステラジアン] で与えられ、円における角度 [ラジアン] の球面  $\text{ver}$  として考えるものであり、円における一周が  $2\pi$  であったように立体角では  $4\pi$  となる。

数式で詳細を記述すると、立体角  $\Omega$  は

$$\int_S d\Omega = 4\pi \quad (2.9)$$

となる。ここで  $S$  は単位球面である。これは通常の間  $\theta$  において

$$\int_C d\theta = 2\pi \quad (2.10)$$

つまり、単位円周の長さの累計が  $2\pi$  になることの拡張であり、立体角は単位球面の占める (単連結的) 面積といえる。

立体角を確認したので、観測者に向かうフラックス (分光/単色) を考えよう。以下は単色フラックスの場合を考える。分光フラックスへの拡張は式(2.7)で行えばよい。

ここで観測者のある方向は観測者を中心とする単位球面から求められる微小立体角  $\delta\Omega$  で記述できる。立体角に関して単位球面は曲率をもつが微小であれば平面として考えることができる。このため微小立体角は微小平面として観測者ベースで考えることができる。さらにその中を観測者に向かって突き抜ける放射は平面波として近似できる。したがって観測者中心の  $\delta\Omega$  の面を突き抜けるフラックス  $\delta F_\lambda = \delta F_\lambda i$  は  $\delta F_\lambda = -\delta F_\lambda \delta\Omega$  として考えることができる。ただし  $\delta\Omega$  は観測者に対して外を向くものである。したがって観測者が測定するフラックスで立体角  $\delta\Omega$  うちのフラックス  $\delta F_\lambda$  から次の量を定義する。

$$I_\lambda(\Omega) = \frac{\delta F_\lambda}{\delta\Omega} \quad (2.11)$$

この  $I$  を (単色) **放射輝度** (radiance) とよぶ。これは放射フラックス (密度) に対する方向的な密度 (フラックス密度の密度) として考えることができる。

以下は添字  $\lambda$  を省略する。

放射輝度を直感的に確認する方法として、厚紙に小さな穴を開けてそこを通る光である。放射輝度は射出される物体からの距離に依存しないことに注意しよう。これはこの直感的な放射輝度の確認方法においてたとえば電球から距離を変えても穴を通る光の強さは変わらないことから確認できる。

ここからは放射輝度の定義(2.11)から出発して放射フラックスなど各種放射量を定義しよう。したがって放射輝度を基本的な物理量として考え、ここまでの導出過程は忘れるものとする。導出過程においては平面波を仮定していたが今後考える放射は平面波でなくいろいろな方向を持つものとする。ここで放射輝度を基本量とすることによって放射に関しては波動的な記述は現れず放射に関して「明るさ (放射輝度)」, 「放射の向き」によって放射が記述されるようになる。

ここで放射輝度の定義(2.11)から立体角全体で積分:

$$F = \int I d\Omega \quad (?) \quad (2.12)$$

と積分すれば放射フラックスが復元できると思われるが実はこれは誤りである．この式の意味は観測者を取り囲む単位球面に入ってくる放射「フラックス」の総量となる．しかしフラックスのもとの意味として、「ある (仮想的) 平面を通り抜ける放射」であり，式(2.12)は不適切である．この定義に忠実であるためには，観測者を中心とした平面  $S$ (面は観測者を通る) に関して観測者がみる方向の  $\Omega$  と面の向き  $n$  に関して

$$F = \int I(\Omega) \Omega \cdot n \, d\Omega \quad (2.13)$$

と定義すると平面  $S$  を通る放射として「フラックス」を復元できる．

具体的な計算方法としては「上向きフラックス」, 「下向きフラックス」や「正味の上向きフラックス」として計算される．ここで放射の向きを記述するために観測者を中心とする 3次元極座標系のうち方位角と天頂角  $(\phi, \theta)$  を導入すると便利である．ただし一般的な大気力学とは異なり天頂角は観測者の上向きから下に向かって測る角度 (一般的な物理学と同じ) であり，緯度的に水平面からの角度でないことに注意しよう．

ここで微小立体角  $d\Omega$  は

$$d\Omega = \cos(\theta) \, d\theta \, d\phi \quad (2.14)$$

であたえられる．

式(2.13)を極座標表記すると面の法線ベクトル  $n$  と観測者の見る方向  $\Omega$  の内積が  $\sin(\theta)$  になることに注意しよう．

放射輝度の引数は  $I = I(\phi, \theta)$  と書き換えられる．ただし引数の方向に放射輝度が向かってるものとする．

まず上向き放射フラックスをもとめる．このとき  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  が上向きであることに記述であるため，

$$F^\uparrow = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta I(\phi, \theta) \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.15)$$

であたえられる．一方で下向き放射フラックスは  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  であるため，

$$F^\downarrow = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta I(\phi, \theta) \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.16)$$

であたえられる．ここでマイナスがついている理由は  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  において  $\cos(\theta) \leq 0$  であり，下向きフラックスを正に補正するためである．ここで正味の上向きフラックスは

$$F^{\text{net}} = F^\uparrow - F^\downarrow \quad (2.17)$$

であたえられ，

$$F^{\text{net}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta I(\phi, \theta) \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.18)$$

としても与えられる．もし下向きの正味のフラックスならばマイナスをつければよい．

特別な例として等方性放射 (isotropic radiation) は在る面に入射する放射輝度がすべての方向で一定値  $I$  をとるものであり、フラックスに関して

$$F = \pi I \quad (2.19)$$

が成立する。

## 3 熱放射

ここでは物体から如何に放射が射出されるか述べることにする。

### 3.1 黒体放射

#### 3.1.1 Planck の法則

**黒体** (black body) とは放射を完全に吸収する (理想的な) 物体である。ここでつぎのようなモデルを考える。

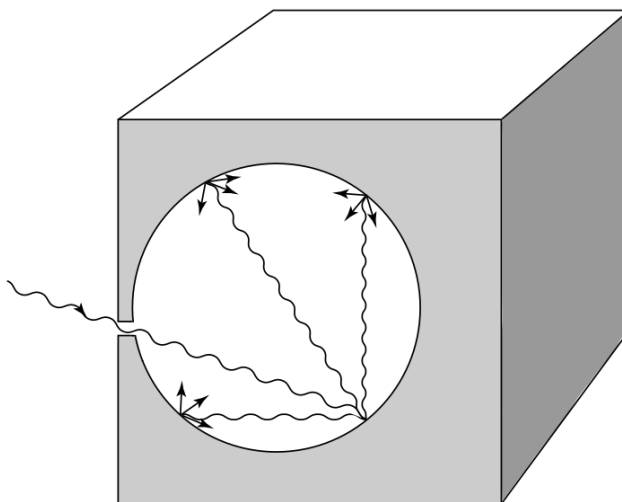


図3 黒体放射のモデル。(Liou, 2002)

放射は穴を経由して中に入っていく、観測者は穴から出てくるわずかな電磁波 (放射輝度) を確認する。しかし出てくる放射は箱の中を占める放射に比べ非常に小さいものである。このような仮定が成り立つには箱の大きさに対して穴は十分小さいことである。したがってこのモデルは黒体を表現したモデルといえる。

観測者は箱内の放射輝度を測定することを目的とする。

いま箱の中は熱力学的に平衡状態にあるとする。空洞内では放射で充満されているがこれは壁にある数多くの調和振動子たちと平衡状態にある。それぞれの調和振動子に関して常に吸収と射出がつりあっている。



簡潔化のため空洞を真空とし辺の長さが  $L$  の立方体とする． $0 \leq x, y, z \leq L$  とする．境界条件として電場は壁面でゼロ ( $\mathbf{E} = 0$  at 壁面) とする．

空洞放射は平衡状態であるから定常的であると仮定すると電磁波は空間的な定常波として記述とされる．

ここで Maxwell 方程式の真空中の波動方程式は、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.1)$$

であたえられるものであった． $c$  は光速である．波の解を  $E_y = E_z = 0$  とする．境界条件をみたすような定常波解は、

$$E_x(x, y, z, t) = A_x \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) \exp(-2i\pi\nu t) \quad (3.2)$$

とする．ここで  $n_x, n_y, n_z$  は少なくとも1つは非ゼロの自然数である．ここで波数ベクトル  $\mathbf{k}$  は

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L} \mathbf{n} \quad (3.3)$$

とかける．ここで  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  とした．

一方モードの周波数は  $\nu = c/(2\pi)|\mathbf{k}|$  で与えられ、

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (3.4)$$

であたえられる．

つぎに状態密度として周波数帯  $[\nu, \nu + d\nu]$  にあるモード数を数え上げる．まず  $N(\nu)$  を

$$N(\nu) = \# \left\{ (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^3 \left| \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \leq \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \right. \right\} \quad (3.5)$$

と定義する．不等式の部分は  $\nu$  に対応する波数  $|\mathbf{k}| = 2\pi\nu/c$  以下をみたすモードたちを数え上げるものである． $N(\nu)$  を計算するが、電磁波は偏光自由度が2(横波)であり、モードは極めて多くあると考えられるから、モードに対応する格子点を数えることは体積を計算することと等価、三次元球の体積 ( $V = 4\pi r^3/3$ ) を参考にし、 $n_x, n_y, n_z \leq 0$  であることに注意して、

$$N(\nu) = 2 \times \left[ \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^3 \right] = \frac{8\pi L^3 \nu^3}{3c^3} = \frac{8\pi \nu^3 V}{3c^3} \quad (3.6)$$

となる．ここで  $V = L^3$  をもちいた．状態密度  $\tilde{g}(\nu)$  は

$$\tilde{g}(\nu) \equiv \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3} \quad (3.7)$$

でもとめられる．黒体放射のエネルギー (体積) 密度に合わせるため、単位体積あたりの周波数帯  $[\nu, \nu + d\nu]$  のモード数は

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu \quad (3.8)$$

である． $g(\nu) = \tilde{g}(\nu)/V$  という関係をもっている．

一方壁面の調和振動子のエネルギー準位は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

であたえられるが，零点エネルギー  $h\nu/2$  をいれると計算で発散してしまい，かつエネルギーはゆらぎ的であるため放射エネルギー密度に計上しない．したがって

$$E_n = nh\nu \quad (3.10)$$

とおくことにする．エネルギー準位  $E_n (= nh\nu)$  が出現確率はカノニカル分布から，

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (3.11)$$

であたえられる．ここで  $\beta$  は逆温度， $k$  は Boltzmann 常数である．分配函数  $Z$  は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n} \quad (3.12)$$

であたえられる．ここで  $x = e^{-\beta h\nu}$  とおくと， $\beta h\nu > 0$  より  $|x| < 1$  であり，幾何無限級数の和の公式，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (3.13)$$

から，

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h\nu n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \quad (3.14)$$

となる．平均エネルギーは  $\langle E \rangle$  は

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot P_n = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot \frac{x^n}{Z} = \frac{h\nu}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \quad (3.15)$$

であたえられる．ここで，

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (3.16)$$

を使うと，

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{Z} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = h\nu \cdot \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (3.17)$$

をえる．すなわち，

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3.18)$$

となる．この式は各モード（周波数  $\nu$ ）の調和振動子がつエネルギーである．

ここで状態密度  $g(\nu)$  とかけると黒体放射のエネルギー密度  $u(\nu, T)$  がもとめられ,

$$u(\nu, T) = g(\nu) \cdot \langle E \rangle = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3.19)$$

となり, これは単位体積あたりの単位周波数幅あたりのエネルギー密度を意味する.

ここで空間中にある放射エネルギー密度  $u(\nu, T)$  に対し, 各方向に等方的に放射されると仮定すると,  $u(\nu, T)$  に光速  $c$  をかけてフラックスフォームにし, かつ全立体角  $4\pi$  でわることで方向平均をとることで,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3.20)$$

と周波数に対する放射輝度が定まる. これを波長に変換するために,

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (3.21)$$

を参照し, 放射輝度はスペクトルであるため,

$$B_\nu(T)d\nu = B_\lambda(T)d\lambda \quad (3.22)$$

ならしめるように, ヤコビアン,

$$\left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2} \quad (3.23)$$

を掛けて

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (3.24)$$

をえる. これは黒体放射の放射輝度であり, 温度のみに比例することがわかる. 式(3.19),(3.20),(3.1.2)はいずれも **Planck の法則**を表している.

### 3.1.2 Stefan-Boltzmann の法則

いま黒体放射輝度を全波長で積分することを考える:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda \quad (3.25)$$

実際に積分を実行してみると,

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda \quad (3.26)$$

となる. ここで変数変換として,  $x = hc/\lambda kT$  とおくと,

$$B(T) = \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (3.27)$$

となる. ここで公式,

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1) \quad (3.28)$$

を用いる．ここで  $\Gamma$  はガンマ関数， $\zeta$  は Riemann のゼータ関数である．いま  $\alpha = 3$  であるので，

$$\begin{aligned}\Gamma(4) &= 3! = 6 \\ \zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}\quad (3.29)$$

を参照して，

$$B(T) = \frac{2k^4 T^4 \pi^4}{h^3 c^2 15} = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4 \quad (3.30)$$

となる．ここでフラックス密度  $F$  は黒体放射が等方的であることから  $F = \pi B(T)$  でもとめられるので，

$$\begin{aligned}F &= \sigma T^4 \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2}\end{aligned}\quad (3.31)$$

をえる．これが Stefan-Boltzmann の法則であり，放射フラックスは黒体温度  $T$  の 4 乗に比例する．

### 3.1.3 Wien の変位法則

## 3.2 吸収率と反射率

## 3.3 太陽放射と地球放射

# 4 放射と光子

光はまた粒子でもある．

先程光は波として扱ったが光は粒子としても扱える．これを光の**波動と粒子の二重性**という．

## 4.1 物理史: 波動 vs 粒子の紛争

ここで光は波動か粒子かのどちらであるかの「紛争」を振り返る．

- 17 世紀: Newton vs Huygens(ホイヘンス)
  - Newton は光は「粒子」の流れと主張．根拠は直進性と反射とした．
  - 一方, Huygens は光は「波」であり波面として主張した．根拠は干渉と屈折の説明からであった．
- 19 世紀前半: 波動説の勝利
  - Young の二重スリット実験 (1801 年) で干渉島を観測し，波動説を決定づけた．
  - Maxwell は Maxwell 方程式から光は電磁波であることを理論的に説明し，波動説は確率された (1860 年)．

- 20 世紀初頭: 粒子説の復活
  - Planck は黒体放射に関してエネルギーが量子化される仮説をもとに黒体放射のスペクトルを理論的に導出した (1901 年).
  - Einstein は光電効果の理論において, 光はエネルギー量子 (光子) としてはたらくと提案し 1 光子のエネルギーを  $E = h\nu$  とし, 金属表面から電子が飛び出すためには, 光の強さ (振幅) ではなく, 周波数が重要である実験結果を説明した.
  - 備考: Planck はエネルギー量子の発見によって 1918 年に Nobel 物理学賞を受賞, Einstein は 1921 年に光電効果の発見などによって Nobel 物理学賞を受賞.
- 現代: 波動と粒子の相補性: 測定文脈への依存
  - 波としての光:
    - \* 現象: 干渉, 回折, 屈折, 偏波
    - \* 対応: 二重スリットや大気中の虹
  - 粒子としての光:
    - \* 量子的単位 (光子) で吸収・射出が発生
    - \* 光電効果, 黒体放射や大気中の分子吸収・射出が対応.
  - 注意: 光が波かつ粒子であることを同時に観測できない.
    - \* 波動的性質を測ろうなら, 粒子的性質は現れない;
    - \* 粒子的性質を測ろうなら, 波動的振る舞いは見えない.

## 4.2 光子の記述

光子 (photon) とは光 (電磁波) を構成する最小のエネルギー単位である. 周波数  $\nu$  の光は 1 個あたりのエネルギーを

$$E = h\nu \quad (4.1)$$

という関係をもち, 粒子的な振る舞いを示す. 光子は質量がゼロである素粒子であり, ボース統計に従うため同一モード (周波数  $\nu$ ) に何個でもいれられる. つまり

$$E = nh\nu \quad (4.2)$$

という関係である. ここで  $n$  の大きさは光の強さ (波: 振幅) に対応する.

そのほかスピン 1 であり, 偏光状態 (直線偏光・円偏光) に対応する.

光子 1 つの運動量  $p$  は

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (4.3)$$

で与えられ有限値として圧力や散乱にきく.

### 4.3 黒体放射再考

さきほどは電磁波として黒体放射のスペクトル, Planck 関数を導出した. ここでは, 光を粒子として黒体放射のスペクトルを導出する.

光子はボース粒子であり, 熱平衡にある光子気体の平均占有数はボース分布をもちいて,

$$\langle N(\nu) \rangle = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4.4)$$

であたえられる. この分布は光子の平均個数が周波数と温度にどう依存するか現している. エネルギー密度の導出を行う. 各モードのエネルギー (粒子視点) は

$$E_\nu = h\nu \langle N(\nu) \rangle \quad (4.5)$$

であたえられる. したがって, 各モードのエネルギーは,

$$E_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4.6)$$

となる. この式は式(3.18)と同じであるため, あとは 3 章と同様の議論で Planck の法則や Stefan-Boltzmann の法則を導出できる.

## 5 気体分子による吸収と射出

## 6 放射伝達方程式

### 6.1 放射伝達方程式の基本形

電磁波は, 真空中でも大気中でも一定の速度で進行しながら, 周囲の物質と相互作用を行う. 具体的には, 進行する過程での吸収, 他の方向への散乱, そして物質自身からの射出の 3 つにわけられる. これらの過程は, 放射媒質の性質や粒子サイズ, そして放射自身の波長に依存し, 放射の空間的, そしてスペクトル的な分布を複雑に変化させる.

放射伝達方程式 (Radiative Transfer Equation) とは, これらの過程を統一的に記述する枠組みであり, 放射輝度が光路に沿ってどのように変化するかを表す. 基本形は「光路に沿ったエネルギー収支式」として理解される. 光子は吸収・散乱によって失われ, 射出や他方向からの散乱によって増加する.

いま, 放射輝度が微小光路  $ds$  を移動する間に, 放射輝度が  $I_\lambda$  から  $I_\lambda + dI_\lambda$  になったとする. これは,

$$dI_\lambda = -k_{e,\lambda} \rho I_\lambda ds \quad (6.1)$$

とかける. ここで  $\rho$  は媒質の密度,  $k_{e,\lambda}$  は質量消散係数であり, 波長  $\lambda$  の放射輝度の減衰をしめす係数である.

質量消散係数は、 $ds$  にある、物質による吸収と他方向への散乱の和である。

媒質による放射の消散は、物質による放射の吸収と、放射の他方向への散乱と考えられる。密度  $\rho$  にたいして、ひとつの物質なら、

$$k = k_a + k_s \quad (6.2)$$

とかけるが、 $N$  個の物質に関しては、各成分の密度を  $\rho_i$  とし、係数たちを  $k_i$  などとかけば、放射の吸収と散乱は、

$$\begin{aligned} \beta_a &:= \sum_i \rho_i k_{a,i} \\ \beta_s &:= \sum_i \rho_i k_{s,i} \\ \beta_e &:= \sum_i \rho_i k_{e,i} \end{aligned} \quad (6.3)$$

とかける。ここで  $\beta_a, \beta_s, \beta_e$  は、それぞれ吸収係数、散乱係数、消散係数とよばれる。

質量以外にも、物質の数密度に注目して、 $\sigma_{e,i}, \sigma_{a,i}, \sigma_{s,i}$  と物質の数密度  $N_i$  をもちいて、式(6.3)を、

$$\begin{aligned} \beta_a &= \sum_i N_i \sigma_{a,i} \\ \beta_s &= \sum_i N_i \sigma_{s,i} \\ \beta_e &= \sum_i N_i \sigma_{e,i} \end{aligned} \quad (6.4)$$

のようにかける。したがって放射の  $ds$  の消散は、一般的に、

$$dI_\lambda = -\beta_{e,\lambda} ds \quad (6.5)$$

とかける。

一方、射出と他方向から光路方向への散乱による放射強度増加に着目する。

射出に関しては Kirchhoff(キルヒホッフ) の法則、「局所熱力学平衡 (LTE) においては波長  $\lambda$  に関して吸収率と射出率が等しい」ということから、 $ds$  の間で空気層が射出する放射輝度は、

$$dI_\lambda = \beta_{a,\lambda} B_\lambda(T) ds \quad (6.6)$$

である。ここで  $B_\lambda(T)$  は Planck 関数である。

他方、散乱による放射強度への寄与は、

$$dI_\lambda = j_{s,\lambda} ds \quad (6.7)$$

と書くことにし、詳細の記述はのちにあたえる。ここで、ソース関数係数  $j$  は

$$j_\lambda = \beta_{a,\lambda} B_\lambda + j_{s,\lambda} \quad (6.8)$$

であたえられる。したがって、 $ds$  の中での放射輝度の正味の増減は、

$$dI_\lambda = -\beta_{e,\lambda} I_\lambda ds + j_\lambda ds \quad (6.9)$$

で記述される。

ここでソース函数  $J_\lambda$  を

$$J_\lambda := \frac{\beta_{e,\lambda}}{j_\lambda} \quad (6.10)$$

と定義する。ソース函数の次元は放射輝度と同じである。

こうして放射伝達方程式は、

$$\frac{dI_\lambda}{\beta_{e,\lambda} ds} = -I_\lambda + J_\lambda \quad (6.11)$$

であたえられる。

## 6.2 Beer-Bouguer-Lambert の法則

Beer-Bouguer-Lambert(ベール・ブーゲ・ランベルト)の法則とは、放射伝達方程式においてソース函数と散乱を無視し、物質による放射の吸収の振る舞いを示した法則である。

射出と散乱を無視した放射伝達方程式は、

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -\beta_{a,\lambda} I_\lambda \quad (6.12)$$

であたえられる。いまこれを  $s$  から観測点  $S$  まで積分することを考える。一般に  $\beta_a$  は空間的に依存することに注意すると、解は、

$$I_\lambda(S) = I_\lambda(s) \exp\left(-\int_s^S \beta_{a,\lambda} ds\right) \quad (6.13)$$

であたえられる。ここで「光学的距離」 $\tau(s, S)$  を

$$\tau_\lambda(s, S) := \int_s^S \beta_{a,\lambda} ds \quad (6.14)$$

で定義すると、式(6.13)は、

$$I_\lambda(S) = I_\lambda(s) e^{-\tau_\lambda(s, S)} \quad (6.15)$$

とかくことができる。光学的距離の次元は長さの次元であり、光(放射)が感じる距離として考えることができる。

さらに(単色)透過率  $T_\lambda$  を

$$T_\lambda = \frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(s)} = e^{-\tau_\lambda(s, S)} \quad (6.16)$$

定義する。いま散乱のない媒質において(単色)吸収率  $A_\lambda$  は

$$A_\lambda = 1 - T_\lambda = 1 - e^{-\tau_\lambda(s, S)} \quad (6.17)$$



と定義できる．もし散乱のある媒質ならば散乱率  $R_\lambda$  を，

$$T_\lambda = 1 - (A_\lambda + R_\lambda) \quad (6.18)$$

と定義でき，あきらかに吸収率と透過率と散乱率の和は 1 となる．

同様の議論は放射輝度を波長に関して積分した放射フラックスや広帯域放射輝度に関しても可能である．

### 6.3 Schwarzschild の方程式と解

Schwarzschild(シュワルツシルト) の法則とは，吸収と熱的射出を含む 1 次元の散乱なしの吸収媒質における放射輝度の変化則である．

放射伝達方程式は，ソース函数を  $J_\lambda = B_\lambda(T)$  と Planck の函数として与えられ，消散係数は吸収のみ考えることに注意して，

$$\frac{dI_\lambda}{\beta_{a,\lambda} ds} = -I_\lambda + B_\lambda(T) \quad (6.19)$$

であたえられる．ここで  $s$  から点  $s_1$  までの光学的距離，

$$\tau(s, s_1) = \int_{s_1}^s \beta_{a,\lambda} ds' \quad (6.20)$$

から，

$$d\tau_\lambda(s, s_1) = -\beta_{a,\lambda} ds \quad (6.21)$$

に気づく．放射伝達方程式は，

$$-\frac{dI_\lambda(s)}{d\tau_\lambda(s, s_1)} = -I_\lambda(s) + B_\lambda[T(s)] \quad (6.22)$$

であたえられる．両辺に積分因子  $e^{\tau_\lambda(s', S)}$  をかけて，厚さ  $ds$  で 0 から  $S$  まで積分すると，

$$-\int_0^S d \left[ I_\lambda(s') e^{-\tau_\lambda(s', S)} \right] = \int_0^S B_\lambda[T(s')] e^{-\tau_\lambda(s', S)} d\tau_\lambda(s', S) \quad (6.23)$$

から，

$$I_\lambda(S) = I_\lambda(0) e^{-\tau_\lambda(0, S)} + \int_0^S \beta_a B_\lambda[T(s')] e^{\tau_\lambda(s', S)} ds' \quad (6.24)$$

であたえられる．これを Schwarzschild の法則という．この式は観測点  $S$  で観測される波長  $\lambda$  の放射輝度は，点 0 から  $S$  まで大気に吸収されながらも届いた，点 0 からの放射 (右辺第一項) と点 0 から  $S$  の途中にある物質からの Planck 放射による放射への寄与と，その放射が途中の点  $s'$  から  $S$  の物質に吸収されながらも観測点  $S$  にとどいた放射 (右辺第二項) の和で表される．

### 6.4 平行平面近似モデル

平行平面近似モデルとは，大気放射における放射伝達方程式を解く際の理想的なモデルである。

大気における放射は鉛直下向きと上向きの両方を考えることができ，鉛直下向きの放射は太陽放射に対応し，大気上端からの太陽放射を地上の観測点で観測することに対応する。一方鉛直上向きの放射は地球放射に対応し，地上や大気からの放射を大気上端の衛星で観測することに対応する。

ここで仮定として，

- 大気の水平方向に一様な平行な層の連続的な成層として考える。
- 大気の物理量 (温度，密度，組成など) は鉛直方向  $z$  のみの函数とする。
- 地球の曲率は無視し，鉛直方向はつねに平行的とする。

ここでは添字の波長  $\lambda$  は省略するとする。放射伝達方程式は，図 4を参考にして，

$$|\cos(\theta)| \frac{dI(z; \theta, \phi)}{\beta_e dz} = -I(z; \theta, \phi) + J(z; \theta, \phi) \tag{6.25}$$

であたえられる。ここで光路距離  $s$  は

$$s = \frac{z}{\mu} \tag{6.26}$$

とおき， $\mu$  を

$$\mu := |\cos(\theta)| \tag{6.27}$$

と定義する。 $\theta$  は光線の伝播方向と天頂方向の間の角度であるが，伝播方向が上向きでも下向きでも  $0 \leq \mu \leq 1$  であることに注意されたい。

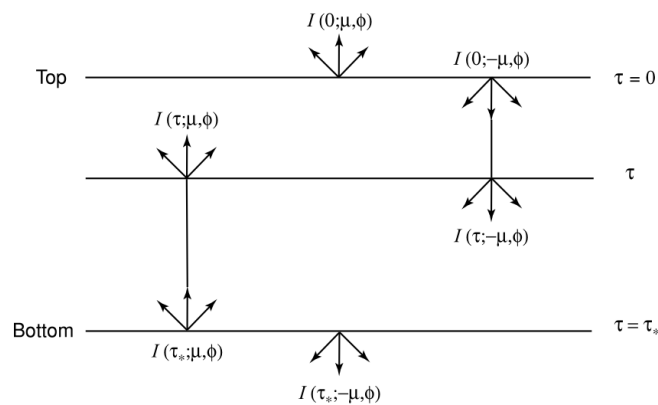


図4 平行平面大気の様式図 (Liou, 2002)

平面大気で近似した高度  $z_1$  と  $z_2 (z_1 < z_2)$  の間の「光学的厚さ」 (optical thickness) を

$$\tau(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \beta_e(z) dz \quad (6.28)$$

と定義する．光学的厚さは放射の波長によって異なることに注意しよう．方向  $\mu$  へ伝播する光線の透過率は、

$$t(z_1, z_2) = \exp \left[ -\frac{1}{\mu} \tau(z_1, z_2) \right] \quad (6.29)$$

として定義される．

さらに光学的厚さは鉛直座標に採用することができ、大気中の任意の高度  $z$  とそれより高い高度  $z_{\text{top}}$  をもちいて定義することができる． $\beta_e > 0$  であるので光学的厚さは非負の量であり、 $z$  が  $z_{\text{top}}$  に近づくとき光学的厚さは 0 に近づき、鉛直下向きに単調増加する量である．ここで  $z_{\text{top}}$  は大気上端として放射の消散に影響を与えないとして鉛直無限高にとることになると、光学的深さ (optical depth) は、

$$\tau(z) := \lim_{z_{\text{top}} \rightarrow \infty} \tau(z, z_{\text{top}}) = \int_z^{\infty} \beta_e(z') dz' \quad (6.30)$$

として定義される．海面  $z = 0$  では  $\tau^*$  と書くことにする．

光学的深さを用いれば式(6.28)で定義された光学的厚さは、

$$\tau(z_1, z_2) = \tau(z_1) - \tau(z_2) \quad (6.31)$$

で書き改めることができる．さらに光線の透過率、式(6.29)は、

$$t(z_1, z_2) = \exp \left[ -\frac{1}{\mu} \tau(z_1, z_2) \right] = \frac{t(z_1)}{t(z_2)} \quad (6.32)$$

であたえられる．ここで高度  $z$  から大気上端までの透過率は、

$$t(z) := e^{-\tau(z)/\mu} \quad (6.33)$$

であたえられる．

ここで実際に平行平面大気の放射伝達方程式を解いてみよう．いま放射に対して吸収と物質射出のみあるとし、散乱はないとする．さらに大気は局所熱平衡とする．したがってソース関数は Planck 関数をもちいて、

$$J(z; \theta, \phi) = B[T(z)] \quad (6.34)$$

とする．ここで温度は平行平面大気の仮定から  $z$  のみに依存するとし、黒体放射は等方的であったことを思い出そう．

ここで式(6.30)から

$$\frac{d\tau}{\mu} = -\beta_e \frac{dz}{\mu} \quad (6.35)$$

に気づくだろう。したがって放射伝達方程式は、式(6.22)と同じかたち、

$$-\frac{dI(z; \theta, \phi)}{d\tau(z)} = -I(z) + B[T(z)] \quad (6.36)$$

という形になる。

1. 下向き放射の場合: 太陽放射に対応し、観測点は地表面  $z = 0$  で下向き太陽放射と大気放射を測定する。この場合、式(6.34)を大気上端  $z \rightarrow \infty$  から地表  $z = 0$  まで積分する。ここで大気上端では光学的深さは  $\tau = 0$ 、地表で  $\tau = \tau^*$  で与えられることを思い出せば、

$$I^\downarrow(0) = I^\downarrow(\infty)e^{-\tau^*/\mu} + \int_0^\infty B[T(z')] \beta_a e^{-\tau(z')/\mu} dz' \quad (6.37)$$

をえる。

2. 上向き放射の場合: 地球放射に対応し、地表  $z = 0$  から射出された上向き地球放射と大気中の物質から射出された上向き放射の和を大気上端  $z \rightarrow \infty$  にある衛星で測定する。この場合、

$$I^\uparrow(\infty) = I^\uparrow(0)e^{-\tau^*/\mu} + \int_0^\infty B[T(z')] \beta_a e^{-\tau(z')/\mu} dz' \quad (6.38)$$

となる。

ここで下向き放射の解(6.37)に関して、

$$t^* := e^{-\tau^*/\mu} \quad (6.39)$$

を用いて

$$I^\downarrow(0) = I^\downarrow(\infty)t^* + \int_0^\infty B(z)W^\downarrow(z')dz' \quad (6.40)$$

とかいてみる。ここで  $W(z)$  は「荷重函数」であり、

$$W^\downarrow(z) = \frac{\beta_a(z)}{\mu} t(0, z) = -\frac{dt(0, z)}{dz} \quad (6.41)$$

と定義する。式(6.40)の解釈として、地表での下向き放射は、右辺第一項の大気上端に入射する放射と透過率  $t$  との積として、大気上端に入射し地表まで大気中を透過した放射と右辺第二項の Planck 放射とその放射の荷重函数との積との積分で表される地表に届く大気内からの下向き放射との和で表される。

同様に上向き放射に関して、

$$I^\uparrow(\infty) = I^\uparrow(0)t^* + \int_0^\infty B(z')W^\uparrow(z') dz' \quad (6.42)$$

と書くことにし、荷重函数  $W^\uparrow$  を

$$W^\uparrow(z) = \frac{\beta_a(z)}{\mu} t(z, \infty) = \frac{dt(z, \infty)}{dz} \quad (6.43)$$

と定義する．式(6.42)の解釈は下向き放射と同様，地球放射として大気中を透過した放射と，大気中の各高度からの射出を重み付けしたものの和となっている．

## 参考文献

- Liou, K.N. (2002) An Introduction to Atmospheric Radiation. 2nd Edition, Academic Press, San Diego, CA.
- Petty, G.W. (2004) A First Course in Atmospheric Radiation. Sundog Publishing, Madison, WI.
- 気象庁数値予報解説資料資料集 (令和 6 年度)