

準地衡方程式系の導出

坂浦いと

2025-04-17

目次

1	はじめに	1
2	非静水圧モデルとバランス流	2
3	スケール分析と方程式系の無次元化	4
4	摂動展開と準地衡方程式系	10
5	準地衡渦位	14

1 はじめに

準地衡方程式系とはプリミティブ方程式系を卓越するスケールで近似することで得られる方程式系である。準地衡方程式系は主に中緯度総観スケールを考えた数値計算や解析に利用する方程式系であり、バランス流とその調節についての詳細な記述が可能である。今回はプリミティブモデルをさらに緩めた非静水圧モデルから出発し準地衡方程式系を導出する。さらに適宜非静水圧モデルあるいはプリミティブモデルとの比較を行い、準地衡方程式系の位置づけを確認する。

2 非静水圧モデルとバランス流

出発点となる方程式系は非断熱・非摩擦な非静水圧モデルとし、座標軸は (x, y, z, t) とする．状態場 (圧力・密度や温位) に対しては静止場である基本場が定義され、基本場圧力 p_R や ρ_R は高度 z のみの函数であり、静水圧平衡、

$$\frac{dp_R(z)}{dz} = -\rho_R(z)g \quad (2.1)$$

の関係にある．基準温位 θ_R は

$$\theta_R(z) = \frac{p_R(z)}{\rho_R(z)R} \left(\frac{p_s}{p_R(z)} \right)^{R/c_p} \quad (2.2)$$

で与える．したがって状態場は

$$p(x, y, z, t) = p_R(z) + p'(x, y, z, t) \quad (2.3a)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_R(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (2.3b)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_R(z) + \theta'(x, y, z, t) \quad (2.3c)$$

とする．ここで $|\rho'|/\rho_R \sim |p'|/p_R \sim Fr/Ro = 10^{-2}$ (中緯度自由対流圏大気) であるため、運動場は静止場と比べて小さい．ここから二次の運動状態場は無視することができる．

非静水圧モデルの方程式系は

非静水圧モデル

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad (2.4a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad (2.4b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b', \quad (2.4c)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0, \quad (2.4d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_R w) = 0. \quad (2.4e)$$

ただし,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.5a)$$

$$\phi' := \frac{p'}{\rho_R}, \quad (2.5b)$$

$$b' := g \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad (2.5c)$$

である. ただし f は南北に変動するとし, θ_0 は地表での温位 (常数) とする.

式(2.4d)に関して両辺を θ_0 で割れば b' を用いて,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) b' + N^2 w = 0 \quad (4c')$$

と書き改めることができる. ここで N はブルント・バイサラ振動数 (浮力振動数) に対応する量,

$$N = \left[\frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_R}{dz} \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

である.

各式の解釈は, 水平運動方程式系について圧力勾配力は基本場からのゆらぎ, ϕ' のみ寄与すること, 鉛直加速度は静水圧平衡でない運動場圧力函数 ϕ' と浮力 b' の合力によって起こされること, 温位保存則のオイラー表記から, 鉛直速度によって浮力にラグランジュ的变化が起こされることである.

地球流体には大きく自転効果と重力それぞれの平衡解が存在し, 前者は地衡流平衡, 後者は静水圧平衡である. ここではナイーブな議論であるが, 水平, 鉛直方程式の加速度項をゼロにすると, 地衡流平衡の式,

$$fv = \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad (2.7a)$$

$$fu = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad (2.7b)$$

および運動場に関する静水圧平衡の式

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = b' \quad (2.8)$$

となる. このふたつが同時に成立する場合, 流れはバランス的にあるという.

観測事実から地球大気の総観スケール以上での運動は地衡平衡・静水圧平衡の運動が卓越している．したがって各観測に関して運動の多くを地衡平衡・静水圧平衡成分で説明できる．この事実から総観スケール以上の流れは多くを占めるバランス流と残りの非バランス流の重ね合わせと理解されることが予想される．次節ではこの事実を定量的に確認しよう．

3 スケール分析と方程式系の無次元化

方程式系において卓越する項を定量的に評価する手法として代表スケールを用いた方程式系の無次元化と項ごとのスケール分析がある．非静水圧モデルに関してつぎのような基本的な代表スケールを定める．

- 水平長 $L = 10^6[\text{m}]$
- 鉛直長 $D = 10^4[\text{m}]$
- 水平速度 $U = 10[\text{m/s}]$

これらの代表スケールはオイラー的である．時間スケールに関しては移流時間スケールを用いる．これは総観スケールの大気構造の時間変化は移流が卓越し大気構造の局所的变化は移流的变化と比べて小さいと考えられるためである．したがって $T = L/U = 10^5[\text{s}]$ とする．そのほかもちいるパラメータとして、コリオリパラメータ f とブルント・バイサラ振動数 N であり、それぞれオーダは $10^{-4}[\text{s}]$ と $10^{-2}[\text{s}]$ である．鉛直速度のスケールはのちに定めるとする．

ここで与えたスケールはいずれも簡単に観測ができるものである．一方観測の難しい鉛直流や状態場のゆらぎはあるバランス条件をもとにスケールを推定する．

方程式系を無次元する上で重要となるのは、物理量の無次元化である．任意の物理量 a に対し代表スケール A ($A \geq 0$) と無次元量 a^* が存在して

$$a = Aa^* \quad (3.1)$$

と分解される．ここで a^* は量の次元が無次元であり、オーダは

$$a = \mathcal{O}(A), \quad a^* = \mathcal{O}(1) \quad (3.2)$$

である．ここで $\mathcal{O}$ はオーダを示す記号である．式(3.2)の関係は簡単に、

$$a \sim A, \quad a^* \sim 1 \quad (3.3)$$

と書くこともある． $\sim$ はオーダーが等しいことを示す記号である．

鉛直運動のオーダーを定まるために連続の式(2.4e)に関してスケール分析をすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z}(\rho_R w) &= 0, \\ \frac{U}{L} + \frac{U}{L} + \frac{\rho_R W}{\rho_R D} &\sim 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

この式から、 $W = DU/L$ が確定する．

無次元化は、

$$\begin{aligned} (x, y) &= L(x^*, y^*) \\ z &= Dz^* \\ (u, v) &= U(u^*, v^*) \\ w &= \alpha U w^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

ただし $\alpha = H/L$ (アスペクト比), となる．なお状態量 ϕ' や b' に関するスケールはまだ定まっていない．

コリオリパラメータ $f = f(\varphi)$ は緯度ないし南北座標に依存しているが基準緯度 φ_0 まわりにテイラー一次近似をする．このような近似が有効であるための十分条件は水平スケールが地球半径より小さいことである．

$$\begin{aligned} f &:= 2\Omega \sin(\varphi) = 2\Omega \sin(\varphi_0 + \delta\varphi) \\ &= 2\Omega [\cos(\delta\varphi) \sin(\varphi_0) + \sin(\delta\varphi) \cos(\varphi_0)] \\ &\approx 2\Omega \sin(\varphi_0) + 2 \cos(\varphi_0) \delta\varphi \\ &= f_0 + \beta y \end{aligned} \quad (3.6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} f_0 &:= 2\Omega \sin(\varphi_0) \\ \beta &:= 2\Omega \cos(\varphi_0)/a \end{aligned}$$

であり、

$$y = a\delta\varphi$$

の関係が成立する．このようなコリオリパラメータの近似を β 平面近似といい、球面上での接平面上で大気運動を分析できるようになる．

水平運動方程式 (式(2.4a)と(2.4b)) は,

$$\begin{aligned}\frac{U^2}{L} \frac{Du^*}{Dt^*} - f_0 U \left(1 + \frac{\beta}{f_0} y^*\right) v^* &= -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ \frac{U^2}{L} \frac{Dv^*}{Dt^*} + f_0 U \left(1 + \frac{\beta}{f_0} y^*\right) u^* &= -\frac{\partial \phi'}{\partial y}\end{aligned}$$

または

$$Ro \frac{Du^*}{Dt^*} - \left(1 + \frac{\beta}{f_0} Ly^*\right) v^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial x^*}, \quad (3.7a)$$

$$Ro \frac{Dv^*}{Dt^*} + \left(1 + \frac{\beta}{f_0} Ly^*\right) u^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial y^*} \quad (3.7b)$$

と変形される．ここで Ro はロスビー数とよばれ,

$$Ro := \frac{U}{f_0 L}$$

と定義される．解釈は慣性力/コリオリ力である．

ここで β/f_0 のオーダーを推定する． β や f_0 はコリオリパラメータ f が緯度に依存することから主に (自転)2 次元球面流に寄与すると考えられる．2 次元球面流は絶対渦度保存則によって運動が制約される．絶対渦度保存則というバランス条件から β と f_0 の関係を見つけることができる．今回は β 平面に関して議論しているので $f = f_0 + \beta y$ とコリオリパラメータを緯度に関してテイラー一次近似し

$$\frac{D_H}{Dt}(\zeta + f) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{D_H \zeta}{Dt} + \beta y = 0 \quad (3.8)$$

である． $\frac{D_H}{Dt}$ は水平 2 次元ラグランジュ微分であり，渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

で与えられるものであった．絶対渦度保存則に対してスケール分析をすると

$$\frac{U^2}{L^2} \frac{D_H \zeta^*}{Dt^*} + U \beta v^* = 0 \quad (3.9)$$

となり， $\beta \sim U/L^2$ が確定する．

一方ロスビー数 Ro の定義に戻ると

$$Ro := \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{\beta}{f_0} y \quad (3.10)$$

となり，コリオリパラメータの β 平面展開は

$$f = f_0 + \beta y = f_0(1 + Ro y^*) \quad (3.11)$$

になる．したがって，式(3.7)は

$$Ro \frac{Du^*}{Dt^*} - (1 + Ro y^*) v^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial x^*}, \quad (3.12a)$$

$$Ro \frac{Dv^*}{Dt^*} + (1 + Ro y^*) u^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial y^*} \quad (3.12b)$$

となる．水平運動方程式に対する $Ro \rightarrow 0$ を考えよう．現在考えている方程式系は運動場に関するものであり $U \neq 0$ とする．また f_0 は事前に与えられたものと考えられるため，水平スケール L をパラメータに $Ro \rightarrow 0$ ならしめる条件は $L \rightarrow \infty$ である．しかし β 面近似が成立することを考えているので $L \ll a$ を保ったまま $L \rightarrow \infty$ を考えることになる．これは角速度 $f_0/2$ で自転する 2 次元平面での速度場の極限である．しかし $(u^*, v^*) \neq 0$ なのでこのような場合，無次元化水平運動方程式は

$$-v^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial x^*}; \quad (3.13a)$$

$$u^* = -\frac{1}{f_0 UL} \frac{\partial \phi'}{\partial y^*} \quad (3.13b)$$

となり，左辺と右辺のスケールはつりあわなければならない．したがって， $\phi' \sim f_0 UL$ が確定する．しからは，

(無次元)

$$-v^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial x^*}; \quad (3.14a)$$

$$u^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial y^*}. \quad (3.14b)$$

(有次元)

$$-f_0 v = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}; \quad (3.15a)$$

$$f_0 u = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad (3.15b)$$

となりこれはまさしく地衡流解である．したがって，

$Ro \rightarrow 0$ としての地衡流解

$Ro \rightarrow 0$ に対応する無限に広いスケールの角速度 $f_0/2$ で自転する流体の速度場は地衡平衡にある。

しかし実際の総観スケール気象では完全に流れは地衡解ではなくわずかに地衡成分からずれた非地衡成分が含まれている。これは Ro が完全に 0 ではなく、十分小さい有限な値をもっていると数学的に解釈される。総観スケール気象の運動の様相を描くにはロスビー数 Ro で摂動展開して得られる方程式系が必要である。実際の方程式系の摂動展開はすべての方程式系を無次元してからとする。

つづいて鉛直運動方程式 (式(2.4c)) の無次元化を行う。この式に関してスケール分析を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' \\ \alpha \frac{\partial U^2}{\partial L} &\sim \frac{f_0 UL}{D} \quad \mathcal{O}(b') \end{aligned} \quad (3.16)$$

である。 $\alpha = D/L$ である。ここで経験的に総観スケールは静水圧近似が成り立つという考察から $b' \sim \frac{f_0 UL}{D}$ と確定する。したがって式(3.16)は、

$$\alpha^2 Ro \frac{Dw^*}{Dt^*} = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial z^*} + b'^* \quad (3.17)$$

と与えられる。

完全な静水圧平衡が実現する場合、 $\alpha \ll 1$ または $Ro \ll 1$ の場合であるが後者に関してつぎの事実を得る：

地衡流は静水圧平衡をみたす

地衡流解は静水圧平衡的である。

この事実から、総観スケール流では地衡流近似的であるが自動的に静水圧近似もみたすということである。

地衡流平衡と静水圧平衡の考察から流れの解の集合に関して、

$$\text{静止場} \subset \text{地衡流平衡} \subset \text{静水圧平衡} \quad (3.18)$$

という包含関係が得られるだろう。しかし静止場は当然、地衡流平衡には時間発展が含まれておらず、静水圧平衡には水平方向の時間発展が含まれている。一方静水圧平衡は水平

場に関しては(静水圧平衡のもとで)どのような流れも認められ、水平方向の運動を記述する方程式には近似が一切入っておらずやや煩雑であるだろう．そこでこのような問題提起をしよう．

問題提起: 静水圧平衡的な時間発展する場

静水圧平衡を満たし、水平方向に関してある近似を仮定した時間発展する流れ場を導入せよ．すなわちこのような解集合の包含関係、

$$\text{静止場} \subset \text{地衡流平衡} \subset \text{”導入したい系”} \subset \text{静水圧平衡} \quad (3.19)$$

が成立するような系である．時間発展する流れ場で「最小な」ものかつ静水圧平衡の狭義部分集合を考えよう．

この系は地衡流平衡から少しずらして得ることができると考えられる．得られた無次元化運動方程式は

$$Ro \frac{Du^*}{Dt^*} - (1 + Ro y^*) v^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial x^*}, \quad (3.20a)$$

$$Ro \frac{Dv^*}{Dt^*} + (1 + Ro y^*) u^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial y^*}, \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial \phi'^*}{\partial z^*} = b'^* \quad (3.20c)$$

となる．ただし問題提起に従って考える方程式系は静水圧平衡的であり $\alpha \ll 1$ と考えることができる．実際、地球大気は十分薄いと考えることができるからこの仮定は矛盾がない．この無次元方程式系は静水圧平衡 β 平面方程式を表しているが共通パラメータにロスビー数 Ro を含んでいる．

ここでそのまま計算を続けたいところだが、最後に残した温位保存則(式(4c'))の無次元化を行う．式(4c')を無次元化すると

$$\frac{f_0 U^2 L}{DL} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \right) b'^* + \frac{N^2 U D}{L} w^* = 0,$$

$$\frac{f_0 U L}{N^2 D^2} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \right) b'^* + w^* = 0.$$

ここで $Ro = U/(f_0 L)$ と $L_d = ND/f_0$ とおくと、

$$Ro \left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \phi'^*}{\partial z^*} \right) + w^* = 0 \quad (3.21)$$

をえる．最後の式は(3.20c)を代入した．ここで新しく導入された無次元数 L_d はロスビー変形半径とよばれ，バランス流に対する代表スケールである．この式が $w \neq 0$ のときに釣り合う場合，

$$Ro \left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \sim 1 \quad (3.22)$$

があることが必要である．

4 摂動展開と準地衡方程式系

無次元化した静水圧 β 平面方程式系を再度記述すると，

$$Ro \frac{Du^*}{Dt^*} - (1 + Ro y^*) v^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial x^*}, \quad (4.1a)$$

$$Ro \frac{Dv^*}{Dt^*} + (1 + Ro y^*) u^* = -\frac{\partial \phi'^*}{\partial y^*}, \quad (4.1b)$$

$$Ro \left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \phi'^*}{\partial z^*} \right) + w^* = 0, \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial \rho_R w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4.1d)$$

である．ただし温位保存則 (熱力学第一法則: エネルギー保存則) に関しては静水圧平衡と結びつけている．共通して現れる微小パラメータはロスビー数 Ro である．

いま地衡流平衡から少しずれた解を考えるためすべての従属変数 (u^*, v^*, w^*, ϕ'^*) に関して Ro によって摂動展開する．すなわち，

$$u^* = u_0^* + Ro u_1^* + Ro^2 u_2^* + \cdots, \quad (4.2a)$$

$$v^* = v_0^* + Ro v_1^* + Ro^2 v_2^* + \cdots, \quad (4.2b)$$

$$w^* = w_0^* + Ro w_1^* + Ro^2 w_2^* + \cdots, \quad (4.2c)$$

$$\phi'^* = \phi_0'^* + Ro \phi_1'^* + Ro^2 \phi_2'^* + \cdots \quad (4.2d)$$

のように展開する．これらを式(4.1a)-(4.2d)に代入するが，

$$\frac{D}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*}$$

であったことに注意して,

$$\begin{aligned}
 Ro \left[\frac{\partial}{\partial t^*} (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) + (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial x^*} (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) \right. \\
 \left. + (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial y^*} (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) + (w_0^* + Ro w_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial z^*} (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) \right] \\
 - (1 + Ro y^*) (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) = - \frac{\partial}{\partial x^*} (\phi_0^* + Ro \phi_1^* \dots),
 \end{aligned} \tag{4.3a}$$

$$\begin{aligned}
 Ro \left[\frac{\partial}{\partial t^*} (v_0^* + Ro v_1^* \dots) + (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial x^*} (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) \right. \\
 \left. + (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial y^*} (v_0^* + Ro v_1^* \dots) + (w_0^* + Ro w_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial z^*} (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) \right] \\
 + (1 + Ro y^*) (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) = - \frac{\partial}{\partial y^*} (\phi_0^* + Ro \phi_1^* \dots),
 \end{aligned} \tag{4.3b}$$

$$\begin{aligned}
 Ro \left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t^*} + (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial x^*} + (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) \frac{\partial}{\partial y^*} \right] \frac{\partial}{\partial z^*} (\phi_0^* + Ro \phi_1^* + \dots) \\
 + (w_0^* + Ro w_1^* + \dots) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.3c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (u_0^* + Ro u_1^* + \dots) + \frac{\partial}{\partial y^*} (v_0^* + Ro v_1^* + \dots) + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z^*} [\rho_R (w_0^* + Ro w_1^* + \dots)] = 0 \tag{4.3d}$$

をえる．ここで Ro の次数ごとにまとめると, Ro^0 の項はそれぞれ

$$-v_0^* = - \frac{\partial \phi_0^*}{\partial x^*}, \tag{4.4a}$$

$$u_0^* = - \frac{\partial \phi_0^*}{\partial y^*}, \tag{4.4b}$$

$$w_0^* = 0 \tag{4.4c}$$

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} = 0 \tag{4.4d}$$

となり, 当たり前であるが地衡流解となる．しかし地衡流平衡では静水圧平衡, つまり鉛直加速度が 0 であることを述べており鉛直速度が 0 であるとは限らなかったことに對し, 今回の地衡流解では鉛直速度が 0 となった．鉛直速度が 0 であることから鉛直速度発散は 0 であり, 地衡流は非発散的であることがわかる．しかしこれらの解は時間発展はみとめられない． f_0 は常数であることからこの地衡流解は f_0 平面におけるものであり β 平面及びプリミティブ方程式系の地衡流解と性質がことなる．しかし β 効果による地衡流解はこのあとすぐ現れる．

つぎに Ro^1 の項を書き下ろすと, $w_0^* = 0$ であることに注意し

$$\frac{D_0 u_0^*}{Dt^*} - v_1^* - y^* v_0^* = -\frac{\partial \phi_1'^*}{\partial x^*}, \quad (4.5a)$$

$$\frac{D_0 v_0^*}{Dt^*} + u_1^* + y^* u_0^* = -\frac{\partial \phi_1'^*}{\partial y^*}, \quad (4.5b)$$

$$\left(\frac{L}{L_d}\right)^2 \frac{D_0}{Dt^*} \left(\frac{\partial \phi_0^*}{\partial z^*}\right) + w_1^* = 0, \quad (4.5c)$$

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y} + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial \rho_R w_1^*}{\partial z^*} = 0. \quad (4.5d)$$

ここで時間微分は

$$\frac{D_0}{Dt^*} := \frac{\partial}{\partial t^*} + u_0^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^* \frac{\partial}{\partial y^*} \quad (4.6)$$

で定義される．式(4.5)は時間発展項をもつ方程式系であり，地衡流 (u_0^*, v_0^*) に対する時間発展を示している．速度の展開に対する Ro が一次の項は非地衡流に対応する．地衡流は非地衡流のコリオリ加速及び地衡流自身の β 効果，および地衡流平衡にない圧力勾配力によって加減速が行われる．

一方 Ro^1 の方程式では， Ro^0 では現れなかった熱力学第一法則が初めて現れる．式(4.5c)において左辺のふたつの項が釣り合うならば $L \sim L_d$ である．したがって速度場を一次展開するための要求される水平スケールはロスビーの変形半径と同じスケール，すなわち重力波が慣性の影響をうけるような長さスケールが必要である．このスケールは地衡流調節の文脈から，ある場所において流れの擾乱（非地衡流でもよい）が与えられたときに地衡流的な特徴をもつために必要な水平スケールである．

摂動展開の一次までの項で得られた方程式系(4.4)，(4.5)に関して $\phi_1'^*$ に関して時間発展の方程式が与えられておらず方程式として閉じていない．しかしこの変数を消去することが可能である．

いま $\partial(4.5b)/\partial x^* - \partial(4.5a)/\partial y^*$ を行くと， $\phi_1'^*$ の項が打ち消される．ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{D_0}{Dt^*} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_0^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^* \frac{\partial}{\partial y^*} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\partial}{\partial x^*} + u_0^* \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial x^*} + v_0^* \frac{\partial}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial y^*} + \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \\ &= \frac{D}{Dt^*} \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \end{aligned}$$

などと計算することに注意して計算を実行すると、

$$\begin{aligned} \frac{D_0}{Dt^*} \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} + y^* \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} \right) + v_0^* \\ = - \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで式(4.4d)を用いて左辺を整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{D_0}{Dt^*} \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \right) + \left(\frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \right) \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} \right) + y^* \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} \right) + v_0^* \\ = - \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる．さらに式(4.4d)と式(4.5d)を用いることで

$$\frac{D_0 \zeta_0^*}{Dt^*} + v_0^* = \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial \rho_R w_1^*}{\partial z^*} \quad (4.9)$$

がえられる．ここで地衡流に対する渦度、

$$\zeta_0^* := \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \quad (4.10)$$

を定義した．

準地衡方程式系

$$\frac{D_0 \zeta_0^*}{Dt^*} + v_0^* = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \rho_R w_1^*}{\partial z^*}, \quad (4.11a)$$

$$\left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \frac{D_0}{Dt^*} \left(\frac{\partial \phi_0^*}{\partial z^*} \right) + w_1^* = 0, \quad (4.11b)$$

$$\zeta_0^* := \frac{\partial v_0^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*}. \quad (4.11c)$$

あるいは有次元として

$$\frac{D_g \zeta_g}{Dt} + \beta v_g = \frac{f_0}{\rho_R} \frac{\partial \rho_R w}{\partial z}, \quad (4.12a)$$

$$\frac{D_g}{Dt} \left(\frac{\partial \phi_g}{\partial z} \right) + N^2 w = 0, \quad (4.12b)$$

$$\zeta_g := \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}, \quad (4.12c)$$

ただし u_g, v_g, w, ϕ_g はそれぞれ $u_0^*, v_0^*, w_1^*, \phi_0^*$ に対応する有次元量であり, Lagrange 微分は

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.13)$$

で定義される. 1 つ目の方程式は準地衡渦度方程式であり, β 効果と鉛直発散あるいは水平収束によってパーセルの地衡流的渦度が時間変化することを記述している. 2 つ目の方程式は準地衡熱力学第一法則であり, パーセルの浮力が断熱冷却/昇温を経て変化することを述べている.

5 準地衡渦位

準地衡渦位は式(4.12a)及び(4.12b)から鉛直速度 w を消去することによって得られる. ここで渦位の一般的性質として, ある力学的物理量 q があって, 断熱かつ摩擦なしの場合に

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad (5.1)$$

をみたすものであった. 実際一般的な傾圧大気では Ertel の渦位,

$$Q = \frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho} \quad (5.2)$$

が式(5.1)の要求をみたすものがある. ω_a は絶対渦度ベクトルである.

準地衡系に関してはこの上で定義した Q とは異なり, 式(5.1)と似たような性質をもつ物理量が存在することをこの節で示そう.

式(4.12b)に関して $N = N(z)$ であったことに注意して,

$$\frac{D_g}{Dt} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{\phi_g}{z} \right) + w = 0 \quad (5.3)$$

と変形し, 式(4.12a)と(5.3)から w を消去すると,

$$\frac{D_g}{Dt} \left[\zeta_g + f_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_R \frac{f_0}{N^2} \frac{\partial \phi_g}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (5.4)$$

をえる. 一方地衡流が非発散流 (式(4.4)) であることから, 地衡流線関数 $\psi_g = \phi_g / f_0$ を

導入すると自動的にその式をみたし、式(5.4)を書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{D_g q}{Dt} &= 0, \\ q &:= \nabla^2 \psi_g + f_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_R \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi_g}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる．ただし時間微分は式(4.13)で定義された準地衡 Lagrange 微分である．一方で無次元では、

$$\begin{aligned} \frac{D_0 q^*}{Dt^*} &= 0, \\ q^* &:= \nabla^2 \phi_g^* + y^* + \left(\frac{L}{L_d} \right)^2 \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\rho_R \frac{\partial \psi_g^*}{\partial z^*} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる．ふたたび時間微分は式(4.6)で定義されたものである．

式(5.5)は地衡流によって流れるパーセルに対する渦位保存則であり，Ertel の渦位の準地衡系である．無次元版の渦位方程式に着目すると，水平スケールが大きいほど安定度効果からの影響が大きく，小さいほど絶対渦度の寄与が大きくなる．

準地衡渦位

準地衡渦位 q は地衡流線函数 ψ_g を物理量引数とし、

$$\begin{aligned} \frac{D_g q}{Dt} &= 0, \\ q &:= \nabla^2 \psi_g + f_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_R \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi_g}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

によって定義される物理量である．